Devoir Chaumière

Première Partie : Coordonnées Curvilignes Orthogonales

Dans l'espace euclidien à trois dimensions, noté $\mathbb{E} := \mathbb{R}^3$, une *surface coordonnée* est une surface dans pour laquelle une des coordonnées est fixée. Une *courbe coordonnée* est l'intersection de deux *surfaces coordonnées*. Les systèmes de coordonnées cartésiennes, cylindriques et sphériques sont des cas particuliers de ce que l'on appelle les *coordonnées curvilignes orthogonales*, représentées par les variables (u, v, w). Dans ce cas, il existe trois surfaces coordonnées Σ_{vw}, Σ_{uw} et Σ_{uv} :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \Sigma_{vw} & := & \{(u,v,w)/u = u_\circ\} \\ \Sigma_{uw} & := & \{(u,v,w)/v = v_\circ\} \\ \Sigma_{uv} & := & \{(u,v,w)/w = w_\circ\} \end{array} \right.$$

où $u_\circ, v_\circ$ et $w_\circ \in \mathbb{R}$ sont des constantes. Il existe aussi trois courbes coordonnées γ_u, γ_v et γ_w associées aux variations de u, v et w, respectivement. Les courbes coordonnées sont définies par :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \gamma_u & := & \{(u,v,w)/v = v_\circ, w = w_\circ\} \\ \gamma_v & := & \{(u,v,w)/u = u_\circ, w = w_\circ\} \\ \gamma_w & := & \{(u,v,w)/u = u_\circ, v = v_\circ\} \end{array} \right.$$

Les coordonnées curvilignes (u, v, w) sont exprimées comme des fonctions des coordonnées cartésiennes :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} u & = & u(x,y,z) \\ v & = & v(x,y,z) \\ w & = & w(x,y,z) \end{array} \right.$$

Inversement, les coordonnées cartésiennes peuvent être exprimées comme des fonctions des coordonnées curvilignes orthogonales :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x & = & x(u,v,w) \\ y & = & y(u,v,w) \\ z & = & z(u,v,w) \end{array} \right.$$

Un point $M \in \mathbb{E}$ de l'espace euclidien est représenté par un vecteur position $\overrightarrow{OM}$. Dans la base naturelle $(\overrightarrow{e_u}, \overrightarrow{e_v}, \overrightarrow{e_w})$ associée aux coordonnées curvilignes orthogonales, le vecteur position s'écrit $\overrightarrow{OM} = u\overrightarrow{e_u} + v\overrightarrow{e_v} + w\overrightarrow{e_w}$. Les vecteurs de la base $(\overrightarrow{e_u}, \overrightarrow{e_v}, \overrightarrow{e_w})$ dépendent *a priori* des coordonnées (u, v, w), i.e. $\overrightarrow{e_u} = \overrightarrow{e_u}(u, v, w)$, $\overrightarrow{e_v} = \overrightarrow{e_v}(u, v, w)$ et $\overrightarrow{e_w} = \overrightarrow{e_w}(u, v, w)$. Pour un système de coordonnées curvilignes (u, v, w), la base locale

[1] Dimitri Vey, EISTI, Département Physique et Sciences de l'Ingénieur

(ou repère local) au point M est donnée par $(\overrightarrow{e_u}, \overrightarrow{e_v}, \overrightarrow{e_w})$ avec :

$$\left\{\begin{array}{lcl} \overrightarrow{e_u} & := & \left\| \dfrac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial u} \right\|^{-1} \dfrac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial u} \\ \overrightarrow{e_v} & := & \left\| \dfrac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial v} \right\|^{-1} \dfrac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial v} \\ \overrightarrow{e_w} & := & \left\| \dfrac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial w} \right\|^{-1} \dfrac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial w} \end{array}\right. \tag{1}$$

On introduit les notations $\overrightarrow{h_u} := \partial\overrightarrow{OM}/\partial u$, $\overrightarrow{h_v} := \partial\overrightarrow{OM}/\partial v$ et $\overrightarrow{h_w} := \partial\overrightarrow{OM}/\partial w$. Les vecteurs de la base $(\overrightarrow{e_u}, \overrightarrow{e_v}, \overrightarrow{e_w})$ donnés par les Équations (1) s'écrivent de manière équivalente :

$$\left\{\begin{array}{lcl} \overrightarrow{e_u} & = & \left\| \overrightarrow{h_u} \right\|^{-1} \overrightarrow{h_u} = \dfrac{\overrightarrow{h_u}}{h_u} \\ \overrightarrow{e_v} & = & \left\| \overrightarrow{h_v} \right\|^{-1} \overrightarrow{h_v} = \dfrac{\overrightarrow{h_v}}{h_v} \\ \overrightarrow{e_w} & = & \left\| \overrightarrow{h_w} \right\|^{-1} \overrightarrow{h_w} = \dfrac{\overrightarrow{h_w}}{h_w} \end{array}\right.$$

où l'on note $h_u := \left\|\overrightarrow{h_u}\right\|$, $h_v := \left\|\overrightarrow{h_v}\right\|$ et $h_w := \left\|\overrightarrow{h_w}\right\|$, les normes des vecteurs $\overrightarrow{h_u}$, $\overrightarrow{h_v}$ et $\overrightarrow{h_w}$, respectivement. Les quantités h_u, h_v et h_w sont appelées les *facteurs d'échelle*.

L'expression de l'*élément différentiel linéaire* (ou *vecteur déplacement élémentaire*) $\partial_u\overrightarrow{OM}\,du + \partial_v\overrightarrow{OM}\,dv + \partial_w\overrightarrow{OM}\,dw$, résultant des variations du, dv et dw s'écrit :

$$d\overrightarrow{OM} = \left\| \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial u} \right\| \overrightarrow{e_u} du + \left\| \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial v} \right\| \overrightarrow{e_v} dv + \left\| \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial w} \right\| \overrightarrow{e_w} dw$$

On obtient :

$$d\overrightarrow{OM} = h_u du \ \overrightarrow{e_u} + h_v dv \ \overrightarrow{e_v} + h_w dw \ \overrightarrow{e_w} \tag{2}$$

Coordonnées cartésiennes

Les *coordonnées cartésiennes* sont notées (x, y, z) et la base cartésienne est $(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$. Les expressions du vecteur position et de l'élément différentiel linéaire sont données par $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{e_x} + y\overrightarrow{e_y} + z\overrightarrow{e_z}$ et $d\overrightarrow{OM} = dx\overrightarrow{e_x} + dx\overrightarrow{e_y} + dx\overrightarrow{e_z}$, respectivement.

Coordonnées cylindriques

Les *coordonnées cylindriques* sont notées (r, θ, z) et la base locale cylindrique est $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_z})$, voir la Figure 1. Le vecteur position et l'élément différentiel linéaire sont données par $\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{e_r} + z\overrightarrow{e_z}$ et $d\overrightarrow{OM} = dr\overrightarrow{e_r} + rd\theta\overrightarrow{e_\theta} + dz\overrightarrow{e_z}$, respectivement.

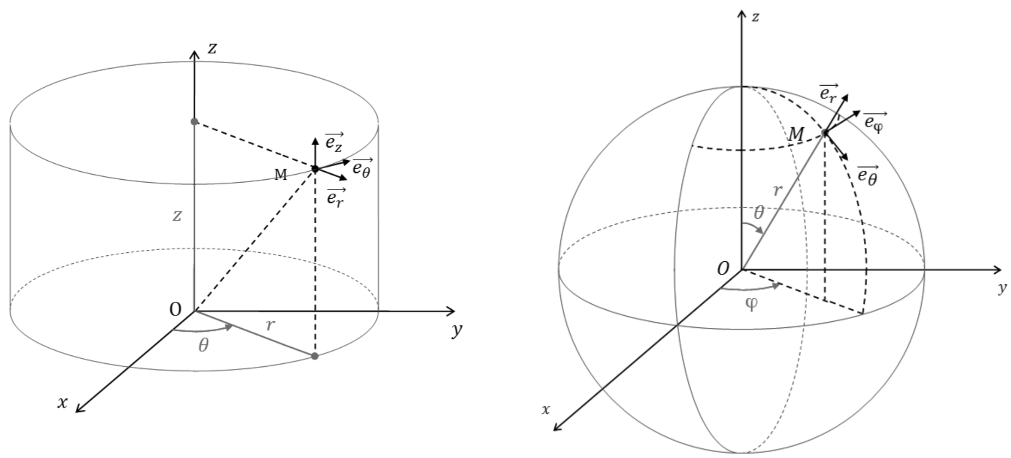

Figure 1: Description des notations utilisées en coordonnées cylindriques (r, θ, z) et en coordonnées sphériques (r, θ, φ).

1. Donner les expressions des coordonnées cartésiennes en fonction des coordonnées cylindriques, i.e. $x = x(r, \theta, z)$, $y = y(r, \theta, z)$ et $z = z(r, \theta, z)$.
2. En déduire l'expression du vecteur position : $\overrightarrow{OM} = x(r, \theta, z)\overrightarrow{e_x} + y(r, \theta, z)\overrightarrow{e_y} + z(r, \theta, z)\overrightarrow{e_z}$.
3.Calculer les dérivées vectorielles $\overrightarrow{h_r} = \partial\overrightarrow{OM}/\partial r$, $\overrightarrow{h_\theta} = \partial\overrightarrow{OM}/\partial\theta$ et $\overrightarrow{h_z} = \partial\overrightarrow{OM}/\partial z$.
4. Donner les expressions des facteurs d'échelle h_r, h_θ et h_z.
5. Retrouver l'expression de l'élément différentiel linéaire $d\overrightarrow{OM} = dr\overrightarrow{e_r} + rd\theta\overrightarrow{e_\theta} + dz\overrightarrow{e_z}$.
6. En utilisant les Équations (1), donner les expressions des vecteurs de base $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_z})$ en fonction des vecteurs de la base $(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$.

Coordonnées Sphériques

Les *coordonnées sphériques* sont notées (r, θ, φ), voir la Figure 1. Le vecteur position et l'élément différentiel linéaire sont données par $\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{e_r}$ et $d\overrightarrow{OM} = dr\overrightarrow{e_r} + rd\theta\overrightarrow{e_\theta} + r\sin\theta d\varphi\overrightarrow{e_\varphi}$, respectivement.
1. Donner les expressions des coordonnées cartésiennes (x, y, z) en fonction des coordonnées sphériques (r, θ, φ), i.e. $x = x(r, \theta, \varphi)$, $y = y(r, \theta, \varphi)$ et $z = z(r, \theta, \varphi)$.
2. En déduire l'expression du vecteur position : $\overrightarrow{OM} = x(r, \theta, \varphi)\overrightarrow{e_x} + y(r, \theta, \varphi)\overrightarrow{e_y} + z(r, \theta, \varphi)\overrightarrow{e_z}$.
3. Calculer les dérivées vectorielles $\overrightarrow{h_r} := \partial\overrightarrow{OM}/\partial r$, $\overrightarrow{h_\theta} := \partial\overrightarrow{OM}/\partial\theta$ et $\overrightarrow{h_\varphi} := \partial\overrightarrow{OM}/\partial\varphi$.
4. Donner les expressions des facteurs d'échelle h_r, h_θ et h_φ.
5. Retrouver l'élément différentiel linéaire $d\overrightarrow{OM} = dr\overrightarrow{e_r} + rd\theta\overrightarrow{e_\theta} + r\sin\theta d\varphi\overrightarrow{e_\varphi}$.
6. En utilisant les Équations (1), donner les expressions des vecteurs de base $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_\varphi})$ en fonction des vecteurs de la base $(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$.

Seconde Partie : Opérateurs différentiels

Gradient

En un point de l'espace euclidien $\mathbb{E}$, on considère la base locale $(\overrightarrow{e_u}, \overrightarrow{e_v}, \overrightarrow{e_w})$, associée au coordonnées curvilignes orthogonales (u, v, w). On rappelle que l'opérateur différentiel gradient, noté $\overrightarrow{\nabla}$, est défini par la formule suivante :

$$df = \overrightarrow{\nabla} f \cdot d\overrightarrow{OM} \tag{3}$$

où $f : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{R} : (u, v, w) \longmapsto f(u, v, w)$ est une fonction scalaire quelconque, df est la différentielle totale de f et $d\overrightarrow{OM}$ est l'élément différentiel linéaire.

1. En utilisant la définition (3), démontrer que l'expression du gradient dans la base locale $(\overrightarrow{e_u}, \overrightarrow{e_v}, \overrightarrow{e_w})$ s'écrit :

$$\overrightarrow{\nabla} = \overrightarrow{e_u} \frac{1}{h_u} \frac{\partial}{\partial u} + \overrightarrow{e_v} \frac{1}{h_v} \frac{\partial}{\partial v} + \overrightarrow{e_w} \frac{1}{h_w} \frac{\partial}{\partial w}$$

2. En déduire les relations suivantes :

$$\overrightarrow{\nabla} u = \frac{\overrightarrow{e_u}}{h_u}, \qquad \overrightarrow{\nabla} v = \frac{\overrightarrow{e_v}}{h_v}, \qquad \overrightarrow{\nabla} w = \frac{\overrightarrow{e_w}}{h_w}. \tag{4}$$

3. En utilisant la formule (4) ainsi que les facteurs d'échelle h_x, h_y et h_z, retrouver l'expression du gradient en coordonnées cartésiennes,

$$\overrightarrow{\nabla} = \overrightarrow{e_x} \frac{\partial}{\partial x} + \overrightarrow{e_y} \frac{\partial}{\partial y} + \overrightarrow{e_z} \frac{\partial}{\partial z}$$

4. En utilisant la formule (4) et les facteurs d'échelle h_r, h_θ et h_z, retrouver l'expression du gradient en coordonnées cylindriques :

$$\overrightarrow{\nabla} = \overrightarrow{e_r} \frac{\partial}{\partial r} + \overrightarrow{e_\theta} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \overrightarrow{e_z} \frac{\partial}{\partial z}$$

5. En utilisant la formule (4) et les facteurs d'échelle h_r, h_θ et h_φ, retrouver l'expression du gradient en coordonnées sphériques,

$$\overrightarrow{\nabla} = \overrightarrow{e_r} \frac{\partial}{\partial r} + \overrightarrow{e_\theta} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \overrightarrow{e_\varphi} \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

Divergence

On considère le vecteur $\overrightarrow{V} := V_u \overrightarrow{e_u} + V_v \overrightarrow{e_v} + V_w \overrightarrow{e_w}$.

1. Démontrer que l'expression de la divergence du vecteur $\overrightarrow{V}$, notée $\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{V}$, s'écrit

$$\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{V} = \frac{1}{h_u h_v h_w} \left[\frac{\partial}{\partial u} (h_v h_w V_u) + \frac{\partial}{\partial v} (h_u h_w V_v) + \frac{\partial}{\partial w} (h_u h_v V_w) \right] \tag{5}$$

2. En utilisant la formule (5) et les facteurs d'échelle h_x, h_y et h_z, retrouver l'expression de la divergence $\overrightarrow{\nabla} \cdot V$ d'un champ de vecteur $\overrightarrow{V}$ en coordonnées cartésiennes,

$$\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$$

3. En utilisant la formule (5) et les expressions des facteurs d'échelle h_r, h_θ et h_z, retrouver la formule de la divergence d'un champ de vecteur $\overrightarrow{V}$ en coordonnées cylindriques :

$$\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{V} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rV_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$$

4. En utilisant la formule (5) et les expressions facteurs d'échelle h_r, h_θ et h_φ, retrouver la formule de la divergence en coordonnées sphériques :

$$\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{V} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 V_r\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta V_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi}$$

Rotationnel

1. Démontrer que l'expression du rotationnel $\overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{V}$ du vecteur $\overrightarrow{V}$ dans la base locale $(\overrightarrow{e_u}, \overrightarrow{e_v}, \overrightarrow{e_w})$ s'écrit :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{V} \quad := \quad & \frac{1}{h_v h_w}\left[\frac{\partial}{\partial v}(h_w V_w) - \frac{\partial}{\partial w}(h_v V_v)\right]\overrightarrow{e_u} \\ & + \frac{1}{h_u h_w}\left[\frac{\partial}{\partial w}(h_u V_u) - \frac{\partial}{\partial u}(h_w V_w)\right]\overrightarrow{e_v} \\ & + \frac{1}{h_u h_v}\left[\frac{\partial}{\partial u}(h_v V_v) - \frac{\partial}{\partial v}(h_u V_u)\right]\overrightarrow{e_w}\end{aligned} \tag{6}$$

2. En utilisant la formule (6) et les facteurs d'échelle h_x, h_y et h_z, retrouver l'expression du rotationnel en coordonnées cartésiennes :

$$\overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{V} : \left[\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z}\right]\overrightarrow{e_x} + \left[\frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x}\right]\overrightarrow{e_y} + \left[\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y}\right]\overrightarrow{e_z}$$

3. En utilisant la formule (6) et les facteurs d'échelle h_r, h_θ et h_z, retrouver l'expression du rotationnel en coordonnées cylindriques :

$$\overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{V} := \left[\frac{1}{r}\frac{\partial V_z}{\partial \theta} - \frac{\partial V_\theta}{\partial z}\right]\overrightarrow{e_r} + \left[\frac{\partial V_r}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial r}\right]\overrightarrow{e_\theta} + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rV_\theta) - \frac{\partial V_r}{\partial \theta}\right]\overrightarrow{e_z}$$

4. En utilisant la formule (6) et les facteurs d'échelle h_r, h_θ et h_φ, retrouver l'expression du rotationnel en coordonnées sphériques,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{V} \quad = \quad & \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta V_\varphi) - \frac{\partial V_\theta}{\partial \varphi}\right]\overrightarrow{e_r} \\ & + \frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial V_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial r}(rV_\varphi)\right]\overrightarrow{e_\theta} \\ & + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rV_\theta) - \frac{\partial V_r}{\partial \theta}\right]\overrightarrow{e_\varphi}\end{aligned}$$