Devoir Chaumière – Corrigé

Première Partie : Coordonnées Curvilignes Orthogonales

Coordonnées cylindriques

1. Les transformations des coordonnées cylindriques (r, θ, z) vers les coordonnées cartésiennes (x, y, z) sont données par le système d'équations :

$$\begin{cases} x &= r\cos\theta \\ y &= r\sin\theta \\ z &= z \end{cases} \tag{1}$$

2. En utilisant les Équations (1), on obtient :

$$\overrightarrow{OM} = r\cos\theta\overrightarrow{e_x} + r\sin\theta\overrightarrow{e_y} + z\overrightarrow{e_z}. \tag{2}$$

3. Le calcul des dérivées vectorielles $\overrightarrow{h_r} = \partial\overrightarrow{OM}/\partial r$, $\overrightarrow{h_\theta} = \partial\overrightarrow{OM}/\partial\theta$ et $\overrightarrow{h_z} = \partial\overrightarrow{OM}/\partial z$ donne :

$$\begin{cases} \overrightarrow{h_r} &= \dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\cos\theta\overrightarrow{e_x} + r\sin\theta\overrightarrow{e_y} + z\overrightarrow{e_z}\right) = \cos\theta\overrightarrow{e_x} + \sin\theta\overrightarrow{e_y} \\ \overrightarrow{h_\theta} &= \dfrac{\partial}{\partial \theta}\left(r\cos\theta\overrightarrow{e_x} + r\sin\theta\overrightarrow{e_y} + z\overrightarrow{e_z}\right) = -r\sin\theta\overrightarrow{e_x} + r\cos\theta\overrightarrow{e_y} \\ \overrightarrow{h_z} &= \dfrac{\partial}{\partial z}\left(r\cos\theta\overrightarrow{e_x} + r\sin\theta\overrightarrow{e_y} + z\overrightarrow{e_z}\right) = \overrightarrow{e_z} \end{cases} \tag{3}$$

4. On donne les facteurs d'échelle h_r, h_θ et h_z :

$$h_r = \left\|\overrightarrow{h_r}\right\| = \left\|\frac{\partial\overrightarrow{OM}}{\partial r}\right\|, \quad h_\theta = \left\|\overrightarrow{h_\theta}\right\| = \left\|\frac{\partial\overrightarrow{OM}}{\partial \theta}\right\|, \quad h_z = \left\|\overrightarrow{h_z}\right\| = \left\|\frac{\partial\overrightarrow{OM}}{\partial z}\right\| \tag{4}$$

Le premier facteur d'échelle est $h_r = \|\cos\theta\overrightarrow{e_x} + \sin\theta\overrightarrow{e_y}\| = \sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = 1$. Le deuxième facteur d'échelle est : $h_\theta = \sqrt{r^2\sin^2\theta + r^2\cos^2\theta} = r\sqrt{\sin^2\theta + \cos^2\theta} = r$. Le dernier facteur d'échelle est $h_z = \|\overrightarrow{e_z}\| = 1$. Finalement, on obtient

$$h_r = 1, \quad h_\theta = r, \quad h_z = 1 \tag{5}$$

5. L'élément différentiel linéaire, exprimé dans la base cylindrique $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_z})$, s'obtient en utilisant la formule $d\overrightarrow{OM} = h_r dr\ \overrightarrow{e_r} + h_\theta d\theta\ \overrightarrow{e_\theta} + h_z dz\ \overrightarrow{e_z}$, ainsi que les facteurs d'échelle donnés par les Équations (5). On trouve

$$d\overrightarrow{OM} = dr\overrightarrow{e_r} + rd\theta\overrightarrow{e_\theta} + dz\overrightarrow{e_z} \tag{6}$$

[1] Dimitri Vey, EISTI – Ecole Internationale des Sciences et Techniques de l'Information

6. Les expressions des vecteurs de base $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_z})$ en fonction des vecteurs de la base $(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$ sont :

$$\left\{\begin{array}{lllll} \overrightarrow{e_r} & = & \dfrac{1}{h_r}\dfrac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial r} & = & \cos\theta\overrightarrow{e_x} + \sin\theta\overrightarrow{e_y}, \\ \\ \overrightarrow{e_\theta} & = & \dfrac{1}{h_\theta}\dfrac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial v} & = & \dfrac{1}{r}\left(-r\sin\theta\overrightarrow{e_x} + r\cos\theta\overrightarrow{e_y}\right) - \sin\theta\overrightarrow{e_x} + \cos\theta\overrightarrow{e_y}, \\ \\ \overrightarrow{e_z} & = & \dfrac{1}{h_w}\dfrac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial w} & = & \overrightarrow{e_z}, \end{array}\right. \tag{7}$$

Coordonnées sphériques

1. Les transformations des coordonnées sphériques (r, θ, φ) vers les coordonnées cartésiennes (x, y, z) sont données par le système d'équations :

$$\left\{\begin{array}{lll} x & = & r\sin\theta\cos\varphi \\ y & = & r\sin\theta\sin\varphi \\ z & = & r\cos\varphi \end{array}\right. \tag{8}$$

2. En utilisant les Équations (8), on obtient :

$$\overrightarrow{OM} = r\sin\theta\cos\varphi\overrightarrow{e_x} + r\sin\theta\sin\varphi\overrightarrow{e_y} + r\cos\theta\overrightarrow{e_z} \tag{9}$$

3. On utilise l'expression de $\overrightarrow{OM}$ obtenu dans l'Équation (8) pour calculer les expressions des dérivées vectorielles $\overrightarrow{h_r}$, $\overrightarrow{h_\theta}$ et $\overrightarrow{h_\varphi}$. Ainsi, le calcul de $\overrightarrow{h_r} := \partial\overrightarrow{OM}/\partial r$ donne :

$$\begin{array}{lll} \overrightarrow{h_r} & = & \dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\sin\theta\cos\varphi\overrightarrow{e_x} + r\sin\theta\sin\varphi\overrightarrow{e_y} + r\cos\theta\overrightarrow{e_z}\right) \\ & = & \sin\theta\cos\varphi\overrightarrow{e_x} + \sin\theta\sin\varphi\overrightarrow{e_y} + \cos\theta\overrightarrow{e_z} \end{array}$$

Le calcul de $\overrightarrow{h_\theta} := \partial\overrightarrow{OM}/\partial\theta$ donne :

$$\begin{array}{lll} \overrightarrow{h_\theta} & = & \dfrac{\partial}{\partial \theta}\left(r\sin\theta\cos\varphi\overrightarrow{e_x} + r\sin\theta\sin\varphi\overrightarrow{e_y} + r\cos\theta\overrightarrow{e_z}\right) \\ & = & r\cos\theta\cos\varphi\overrightarrow{e_x} + r\cos\theta\sin\varphi\overrightarrow{e_y} - r\sin\theta\overrightarrow{e_z} \end{array}$$

Finalement, le calcul de $\overrightarrow{h_\varphi} := \partial\overrightarrow{OM}/\partial\varphi$ donne

$$\begin{array}{lll} \overrightarrow{h_\varphi} & = & \dfrac{\partial}{\partial \varphi}\left(r\sin\theta\cos\varphi\overrightarrow{e_x} + r\sin\theta\sin\varphi\overrightarrow{e_y} + r\cos\theta\overrightarrow{e_z}\right) \\ & = & -r\sin\theta\sin\varphi\overrightarrow{e_x} + r\sin\theta\cos\varphi\overrightarrow{e_y} \end{array}$$

4. On donne les expressions des facteurs d'échelle h_r, h_θ et h_φ. Le premier facteur d'échelle est : $h_r = \left\|\overrightarrow{h_r}\right\| = \|\sin\theta\cos\varphi\overrightarrow{e_x} + \sin\theta\sin\varphi\overrightarrow{e_y} + \cos\theta\overrightarrow{e_z}\|$. On trouve :

$$\begin{array}{lll} h_r & = & \sqrt{\sin^2\theta\cos^2\varphi + \sin^2\theta\sin^2\varphi + \cos^2\theta} \\ & = & \sqrt{\sin^2\theta\left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right) + \cos^2\theta} \\ & = & \sqrt{\sin^2\theta + \cos^2\theta} = 1 \end{array}$$

Le second facteur d'échelle est $h_\theta = \left\|\overrightarrow{h_\theta}\right\| = \|r\cos\theta\cos\varphi\overrightarrow{e_x} + r\cos\theta\sin\varphi\overrightarrow{e_y} - r\sin\theta\overrightarrow{e_z}\|$. On obtient :

$$\begin{aligned} h_\theta &= \sqrt{r^2\left(\cos^2\theta\cos^2\varphi + \cos^2\theta\sin^2\varphi - \sin^2\theta\right)} \\ &= r\sqrt{\left(\cos^2\theta\left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right) + \sin^2\theta\right)} \\ &= r\sqrt{\left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right)} = r \end{aligned}$$

Le dernier facteur d'échelle est $h_\varphi = \left\|\overrightarrow{h_\varphi}\right\| = \|-r\sin\theta\sin\varphi\overrightarrow{e_x} + r\sin\theta\cos\varphi\overrightarrow{e_y}\|$. On obtient :

$$\begin{aligned} h_\varphi &= \sqrt{r^2\left(\sin^2\theta\sin^2\varphi\right)\overrightarrow{e_x} + r^2\sin^2\theta\cos^2\varphi\overrightarrow{e_y}} \\ &= r\sin\theta\sqrt{\sin^2\varphi + \cos^2\varphi} = r\sin\theta \end{aligned}$$

Finalement, on a :

$$h_r = 1, \quad h_\theta = r, \quad h_\varphi = r\sin\theta \tag{10}$$

5. L'élément différentiel linéaire, exprimé dans la base sphérique $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_\varphi})$, s'obtient en utilisant la formule

$$d\overrightarrow{OM} = h_r dr\ \overrightarrow{e_r} + h_\theta d\theta\ \overrightarrow{e_\theta} + h_\varphi d\varphi\ \overrightarrow{e_\varphi} \tag{11}$$

ainsi que les expressions des facteurs d'échelle donnés par les Équations (10). On trouve

$$d\overrightarrow{OM} = dr\overrightarrow{e_r} + rd\theta\overrightarrow{e_\theta} + r\sin\theta d\varphi\overrightarrow{e_\varphi} \tag{12}$$

6. On obtient les expressions des vecteurs de base $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_\varphi})$ en fonction des vecteurs de la base $(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$.

$$\left\{\begin{aligned} \overrightarrow{e_r} &= \frac{1}{h_r}\frac{\partial\overrightarrow{OM}}{\partial r} &&= \sin\theta\cos\varphi\overrightarrow{e_x} + \sin\theta\sin\varphi\overrightarrow{e_y} + \cos\theta\overrightarrow{e_z}, \\ \overrightarrow{e_\theta} &= \frac{1}{h_\theta}\frac{\partial\overrightarrow{OM}}{\partial v} &&= \frac{1}{r}\left(r\cos\theta\cos\varphi\overrightarrow{e_x} + r\cos\theta\sin\varphi\overrightarrow{e_y} - r\sin\theta\overrightarrow{e_z}\right) \\ & &&= \cos\theta\cos\varphi\overrightarrow{e_x} + \cos\theta\sin\varphi\overrightarrow{e_y} - \sin\theta\overrightarrow{e_z} \\ \overrightarrow{e_\varphi} &= \frac{1}{h_\varphi}\frac{\partial\overrightarrow{OM}}{\partial\varphi} &&= \frac{1}{r\sin\theta}\left(-r\sin\theta\sin\varphi\overrightarrow{e_x} + r\sin\theta\cos\varphi\overrightarrow{e_y}\right), \\ & &&= -\sin\varphi\overrightarrow{e_x} + \cos\varphi\overrightarrow{e_y} \end{aligned}\right. \tag{13}$$

Seconde Partie : Opérateurs différentiels

Gradient

1. On utilise la définition du gradient $df = \overrightarrow{\nabla} f \cdot d\overrightarrow{OM}$. La différentielle de la fonction $f = f(u, v, w)$ est donnée par :

$$df = \frac{\partial f}{\partial u}du + \frac{\partial f}{\partial u}dv + \frac{\partial f}{\partial u}dw \tag{14}$$

Dans un second temps on sait que $d\overrightarrow{OM} = h_u du\overrightarrow{e_u} + h_v dv\overrightarrow{e_v} + h_w dw\overrightarrow{e_w}$. Le gradient se décompose dans la base $(\overrightarrow{e_u}, \overrightarrow{e_v}, \overrightarrow{e_w})$ selon :

$$\overrightarrow{\nabla} f := G_u\overrightarrow{e_u} + G_v\overrightarrow{e_v} + G_w\overrightarrow{e_w} \tag{15}$$

Ainsi $\overrightarrow{\nabla} f \cdot d\overrightarrow{OM} = (G_u\overrightarrow{e_u} + G_v\overrightarrow{e_v} + G_w\overrightarrow{e_w}) \cdot (h_u du\overrightarrow{e_u} + h_v dv\overrightarrow{e_v} + h_w dw\overrightarrow{e_w})$ donne :

$$\overrightarrow{\nabla} f \cdot d\overrightarrow{OM} = G_u h_u du + G_v h_v dv + G_w h_w dw \tag{16}$$

En identifiant l'Équation l'Équation (14) avec (16), on obtient :

$$G_u = \frac{1}{h_u}\frac{\partial f}{\partial u} \qquad G_v\frac{1}{h_v}\frac{\partial f}{\partial v} \qquad G_w\frac{1}{h_w}\frac{\partial f}{\partial w} \tag{17}$$

Et donc :

$$\overrightarrow{\nabla} := \overrightarrow{e_u}\frac{1}{h_u}\frac{\partial}{\partial u} + \overrightarrow{e_v}\frac{1}{h_v}\frac{\partial}{\partial v} + \overrightarrow{e_v}\frac{1}{h_w}\frac{\partial}{\partial w} \tag{18}$$

2. On utilise l'expression (18) pour déduire les relations suivantes :

$$\overrightarrow{\nabla} u = \frac{\overrightarrow{e_u}}{h_u}, \qquad \overrightarrow{\nabla} v = \frac{\overrightarrow{e_v}}{h_v}, \qquad \overrightarrow{\nabla} w = \frac{\overrightarrow{e_w}}{h_w}. \tag{19}$$

De façon triviale :

$$\begin{cases} \overrightarrow{\nabla} u & = & \left(\overrightarrow{e_u}\frac{1}{h_u}\frac{\partial}{\partial u} + \overrightarrow{e_v}\frac{1}{h_v}\frac{\partial}{\partial v} + \overrightarrow{e_v}\frac{1}{h_w}\frac{\partial}{\partial w}\right) u & = & \overrightarrow{e_u}\frac{1}{h_u} \\ \overrightarrow{\nabla} v & = & \left(\overrightarrow{e_u}\frac{1}{h_u}\frac{\partial}{\partial u} + \overrightarrow{e_v}\frac{1}{h_v}\frac{\partial}{\partial v} + \overrightarrow{e_v}\frac{1}{h_w}\frac{\partial}{\partial w}\right) v & = & \overrightarrow{e_v}\frac{1}{h_v} \\ \overrightarrow{\nabla} w & = & \left(\overrightarrow{e_u}\frac{1}{h_u}\frac{\partial}{\partial u} + \overrightarrow{e_v}\frac{1}{h_v}\frac{\partial}{\partial v} + \overrightarrow{e_v}\frac{1}{h_w}\frac{\partial}{\partial w}\right) w & = & \overrightarrow{e_v}\frac{1}{h_w} \end{cases}$$

On retrouve bien les Équations (19).
3. De façon triviale, on a :

$$\begin{cases} \overrightarrow{h_x} & = & \frac{\partial\overrightarrow{OM}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x\overrightarrow{e_x} + y\overrightarrow{e_y} + z\overrightarrow{e_z}) = \overrightarrow{e_x} \\ \overrightarrow{h_y} & = & \frac{\partial\overrightarrow{OM}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(x\overrightarrow{e_x} + y\overrightarrow{e_y} + z\overrightarrow{e_z}) = \overrightarrow{e_y} \\ \overrightarrow{h_z} & = & \frac{\partial\overrightarrow{OM}}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}(x\overrightarrow{e_x} + y\overrightarrow{e_y} + z\overrightarrow{e_z}) = \overrightarrow{e_z} \end{cases}$$

On otbtient aussi :

$$\begin{cases} h_x &= \left\| \dfrac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial x} \right\| = \|\overrightarrow{e_x}\| = 1 \\ \\ h_y &= \left\| \dfrac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial y} \right\| = \|\overrightarrow{e_y}\| = 1 \\ \\ h_z &= \left\| \dfrac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial z} \right\| = \|\overrightarrow{e_z}\| = 1 \end{cases}$$

Les vecteurs de la base locale cartésiennes $(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$ sont orthonormés. Donc $\|\overrightarrow{e_x}\| = \|\overrightarrow{e_y}\| = \|\overrightarrow{e_z}\| = 1$. Ainsi, $h_x = h_y = h_z = 1$. De façon triviale

$$\overrightarrow{\nabla} = \overrightarrow{e_x}\frac{\partial}{\partial x} + \overrightarrow{e_y}\frac{\partial}{\partial y} + \overrightarrow{e_z}\frac{\partial}{\partial z} \tag{20}$$

4. En utilisant la formule (18) et les facteurs d'échelle h_r, h_θ et h_z donnés par les Équations (5), on trouve l'expression du gradient en coordonnées cylindriques :

$$\overrightarrow{\nabla} = \overrightarrow{e_r}\frac{\partial}{\partial r} + \overrightarrow{e_\theta}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + \overrightarrow{e_z}\frac{\partial}{\partial z} \tag{21}$$

5. En utilisant la formule (18) et les facteurs d'échelle h_r, h_θ et h_φ donnés par les Équations (10), on obtient l'expression du gradient en coordonnées sphériques :

$$\overrightarrow{\nabla} = \overrightarrow{e_r}\frac{\partial}{\partial r} + \overrightarrow{e_\theta}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + \overrightarrow{e_\varphi}\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi} \tag{22}$$

Divergence

On considère le vecteur $\overrightarrow{V} := V_u\overrightarrow{e_u} + V_v\overrightarrow{e_v} + V_w\overrightarrow{e_w}$. Pour démontrer que l'expression de la divergence du vecteur $\overrightarrow{V}$, notée $\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{V}$, s'écrit

$$\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{V} = \frac{1}{h_u h_v h_w}\left[\frac{\partial}{\partial u}(h_v h_w V_u) + \frac{\partial}{\partial v}(h_u h_w V_v) + \frac{\partial}{\partial w}(h_u h_v V_w)\right] \tag{23}$$

nous allons dans un premier temps donner trois lemmes. On remarque en particulier que :

$$\frac{\overrightarrow{e_u}}{h_v h_w} = \frac{\overrightarrow{e_v}}{h_v} \wedge \frac{\overrightarrow{e_w}}{h_w}, \qquad \frac{\overrightarrow{e_v}}{h_u h_w} = \frac{\overrightarrow{e_w}}{h_w} \wedge \frac{\overrightarrow{e_u}}{h_u}, \qquad \frac{\overrightarrow{e_w}}{h_u h_v} = \frac{\overrightarrow{e_u}}{h_u} \wedge \frac{\overrightarrow{e_v}}{h_v}, \tag{24}$$

Lemme 1. On a les relations :

$$\begin{cases} \overrightarrow{e_u} &= h_v h_w \overrightarrow{\nabla} v \wedge \overrightarrow{\nabla} w \\ \\ \overrightarrow{e_v} &= h_u h_w \overrightarrow{\nabla} w \wedge \overrightarrow{\nabla} u \\ \\ \overrightarrow{e_w} &= h_u h_v \overrightarrow{\nabla} u \wedge \overrightarrow{\nabla} v \end{cases} \tag{25}$$

Preuve – Comme
$$\vec{\nabla} u = \frac{\overrightarrow{e_u}}{h_u}, \qquad \vec{\nabla} v = \frac{\overrightarrow{e_v}}{h_v}, \qquad \vec{\nabla} w = \frac{\overrightarrow{e_w}}{h_w}. \tag{26}$$
on trouve :
$$\left\{\begin{array}{lcl} \dfrac{\overrightarrow{e_u}}{h_v h_w} & = & \dfrac{\overrightarrow{e_v}}{h_v} \wedge \dfrac{\overrightarrow{e_w}}{h_w} = \vec{\nabla} v \wedge \vec{\nabla} w \\ \dfrac{\overrightarrow{e_v}}{h_u h_w} & = & \dfrac{\overrightarrow{e_w}}{h_w} \wedge \dfrac{\overrightarrow{e_u}}{h_u} = \vec{\nabla} w \wedge \vec{\nabla} u \\ \dfrac{\overrightarrow{e_w}}{h_u h_v} & = & \dfrac{\overrightarrow{e_u}}{h_u} \wedge \dfrac{\overrightarrow{e_v}}{h_v} = \vec{\nabla} u \wedge \vec{\nabla} v \end{array}\right. \tag{27}$$
□

Lemme 2. On a les relations :
$$\left\{\begin{array}{lcl} \vec{\nabla} \cdot \left(\dfrac{\overrightarrow{e_u}}{h_v h_w}\right) & = & 0 \\ \vec{\nabla} \cdot \left(\dfrac{\overrightarrow{e_v}}{h_u h_w}\right) & = & 0 \\ \vec{\nabla} \cdot \left(\dfrac{\overrightarrow{e_w}}{h_u h_v}\right) & = & 0 \end{array}\right. \tag{28}$$
Preuve – On sait que pour tout vecteurs $\vec{v}, \vec{w}$ on a la formule suivante :
$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w}) = \vec{w} \cdot \vec{\nabla} \wedge \vec{v} - \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \wedge \vec{w} \tag{29}$$
ainsi, en prenant la divergence des deux côtés de chacune des Équations (27) :
$$\left\{\begin{array}{lcl} \vec{\nabla} \cdot \left(\dfrac{\overrightarrow{e_u}}{h_v h_w}\right) & = & \vec{\nabla} \cdot \left(\vec{\nabla} v \wedge \vec{\nabla} w\right) = (\vec{\nabla} w) \cdot \left(\vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} v\right) - (\vec{\nabla} v) \cdot \left(\vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} w\right) \\ \vec{\nabla} \cdot \left(\dfrac{\overrightarrow{e_v}}{h_u h_w}\right) & = & \vec{\nabla} \cdot \left(\vec{\nabla} w \wedge \vec{\nabla} u\right) = (\vec{\nabla} u) \cdot \left(\vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} w\right) - (\vec{\nabla} w) \cdot \left(\vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} u\right) \\ \vec{\nabla} \cdot \left(\dfrac{\overrightarrow{e_w}}{h_u h_v}\right) & = & \vec{\nabla} \cdot \left(\vec{\nabla} u \wedge \vec{\nabla} v\right) = (\vec{\nabla} v) \cdot \left(\vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} u\right) - (\vec{\nabla} u) \cdot \left(\vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} v\right) \end{array}\right.$$
Finalement, $\vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} u = \vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} v = \vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} w = \vec{0}$. □

Lemme 3. On a les relations :
$$\left\{\begin{array}{lcl} \vec{\nabla} \cdot (V_u \overrightarrow{e_u}) & = & \dfrac{1}{h_u h_v h_w} \left(\dfrac{\partial (V_u h_v h_w)}{\partial u}\right) \\ \vec{\nabla} \cdot (V_v \overrightarrow{e_v}) & = & \dfrac{1}{h_u h_v h_w} \left(\dfrac{\partial (V_v h_u h_w)}{\partial u}\right) \\ \vec{\nabla} \cdot (V_w \overrightarrow{e_w}) & = & \dfrac{1}{h_u h_v h_w} \left(\dfrac{\partial (V_w h_u h_v)}{\partial u}\right) \end{array}\right. \tag{30}$$

Preuve – On évalue les expressions $\overrightarrow{\nabla} \cdot (V_u \overrightarrow{e_u})$, $\overrightarrow{\nabla} \cdot (V_v \overrightarrow{e_v})$ et $\overrightarrow{\nabla} \cdot (V_w \overrightarrow{e_w})$.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\nabla} \cdot (V_u \overrightarrow{e_u}) &= \overrightarrow{\nabla} \cdot \left(V_u h_v h_w \overrightarrow{\nabla} v \wedge \overrightarrow{\nabla} w \right) \\
&= \overrightarrow{\nabla} (V_u h_v h_w) \cdot \left(\overrightarrow{\nabla} v \wedge \overrightarrow{\nabla} w \right) + V_u h_v h_w \overrightarrow{\nabla} \cdot \left(\overrightarrow{\nabla} v \wedge \overrightarrow{\nabla} w \right) \\
&= \overrightarrow{\nabla} (V_u h_v h_w) \cdot \left(\frac{1}{h_v h_w} \overrightarrow{e_u} \right) + V_u h_v h_w \overrightarrow{\nabla} \cdot \left(\frac{1}{h_v h_w} \overrightarrow{e_u} \right) \\
&= \overrightarrow{\nabla} (V_u h_v h_w) \cdot \left(\frac{1}{h_v h_w} \overrightarrow{e_u} \right)
\end{aligned} \tag{31}$$

où on utilise l'identité $\overrightarrow{\nabla} \cdot \left(\overrightarrow{\nabla} v \wedge \overrightarrow{\nabla} w \right) = 0$. En utilisant l'expression du gradient donné par l'Équation (18), on obtient :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\nabla} (V_u h_v h_w) &= \left(\overrightarrow{e_u} \frac{1}{h_u} \frac{\partial}{\partial u} + \overrightarrow{e_v} \frac{1}{h_v} \frac{\partial}{\partial v} + \overrightarrow{e_w} \frac{1}{h_w} \frac{\partial}{\partial w} \right) (V_u h_v h_w) \\
&= \left(\overrightarrow{e_u} \frac{1}{h_u} \frac{\partial (V_u h_v h_w)}{\partial u} + \overrightarrow{e_v} \frac{1}{h_v} \frac{\partial (V_u h_v h_w)}{\partial v} + \overrightarrow{e_w} \frac{1}{h_w} \frac{\partial (V_u h_v h_w)}{\partial w} \right)
\end{aligned} \tag{32}$$

Alors l'Équation (31) devient

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\nabla} \cdot (V_u \overrightarrow{e_u}) &= \overrightarrow{\nabla} (V_u h_v h_w) \cdot \left(\frac{1}{h_v h_w} \overrightarrow{e_u} \right) \\
&= \left(\overrightarrow{e_u} \frac{1}{h_u} \frac{\partial (V_u h_v h_w)}{\partial u} + \overrightarrow{e_v} \frac{1}{h_v} \frac{\partial (V_u h_v h_w)}{\partial v} + \overrightarrow{e_w} \frac{1}{h_w} \frac{\partial (V_u h_v h_w)}{\partial w} \right) \cdot \left(\frac{1}{h_v h_w} \overrightarrow{e_u} \right)
\end{aligned}$$

Finalement,

$$\overrightarrow{\nabla} \cdot (V_u \overrightarrow{e_u}) = \frac{1}{h_u h_v h_w} \left(\frac{\partial (V_u h_v h_w)}{\partial u} \right) \tag{33}$$

De manière équivalente, on évalue $\overrightarrow{\nabla} \cdot (V_v \overrightarrow{e_v})$

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\nabla} \cdot (V_v \overrightarrow{e_v}) &= \overrightarrow{\nabla} \cdot \left(V_v h_u h_w \overrightarrow{\nabla} w \wedge \overrightarrow{\nabla} u \right) \\
&= \overrightarrow{\nabla} (V_v h_u h_w) \cdot \left(\overrightarrow{\nabla} w \wedge \overrightarrow{\nabla} u \right) + V_v h_u h_w \overrightarrow{\nabla} \cdot \left(\overrightarrow{\nabla} w \wedge \overrightarrow{\nabla} u \right) \\
&= \overrightarrow{\nabla} (V_v h_u h_w) \cdot \left(\frac{1}{h_u h_w} \overrightarrow{e_v} \right) + V_v h_u h_w \overrightarrow{\nabla} \cdot \left(\frac{1}{h_u h_w} \overrightarrow{e_v} \right) \\
&= \overrightarrow{\nabla} (V_v h_u h_w) \cdot \left(\frac{1}{h_u h_w} \overrightarrow{e_v} \right)
\end{aligned} \tag{34}$$

En utilisant l'expression du gradient donné par l'Équation (18), on obtient :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\nabla} (V_v h_u h_w) &= \left(\overrightarrow{e_u} \frac{1}{h_u} \frac{\partial}{\partial u} + \overrightarrow{e_v} \frac{1}{h_v} \frac{\partial}{\partial v} + \overrightarrow{e_w} \frac{1}{h_w} \frac{\partial}{\partial w} \right) (V_v h_u h_w) \\
&= \left(\overrightarrow{e_u} \frac{1}{h_u} \frac{\partial (V_v h_u h_w)}{\partial u} + \overrightarrow{e_v} \frac{1}{h_v} \frac{\partial (V_v h_u h_w)}{\partial v} + \overrightarrow{e_w} \frac{1}{h_w} \frac{\partial (V_v h_u h_w)}{\partial w} \right)
\end{aligned} \tag{35}$$

Alors l'Équation (34) devient

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}\cdot\left(V_v\vec{e_v}\right) &= \vec{\nabla}\left(V_v h_u h_w\right)\cdot\left(\frac{1}{h_u h_w}\vec{e_v}\right)\\ &= \left(\vec{e_u}\frac{1}{h_u}\frac{\partial\left(V_v h_u h_w\right)}{\partial u}+\vec{e_v}\frac{1}{h_v}\frac{\partial\left(V_v h_u h_w\right)}{\partial v}+\vec{e_w}\frac{1}{h_w}\frac{\partial\left(V_v h_u h_w\right)}{\partial w}\right)\cdot\left(\frac{1}{h_u h_w}\vec{e_v}\right)\end{aligned}$$

Finalement,

$$\vec{\nabla}\cdot\left(V_v\vec{e_v}\right)=\frac{1}{h_u h_v h_w}\left(\frac{\partial\left(V_v h_u h_w\right)}{\partial v}\right) \tag{36}$$

Il nous reste à évaluer le dernier terme $\vec{\nabla}\cdot\left(V_w\vec{e_w}\right)$. De manière équivalente, on a :

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}\cdot\left(V_w\vec{e_w}\right) &= \vec{\nabla}\cdot\left(V_w h_u h_v\vec{\nabla}u\wedge\vec{\nabla}v\right)\\ &= \vec{\nabla}\left(V_w h_u h_v\right)\cdot\left(\vec{\nabla}u\wedge\vec{\nabla}v\right)+V_w h_u h_v\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{\nabla}u\wedge\vec{\nabla}v\right)\\ &= \vec{\nabla}\left(V_w h_u h_v\right)\cdot\left(\frac{1}{h_u h_v}\vec{e_w}\right)+V_w h_u h_v\vec{\nabla}\cdot\left(\frac{1}{h_u h_v}\vec{e_w}\right)\\ &= \vec{\nabla}\left(V_w h_u h_v\right)\cdot\left(\frac{1}{h_u h_v}\vec{e_w}\right)\end{aligned} \tag{37}$$

En utilisant l'expression du gradient donné par l'Équation (18), on obtient :

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}\left(V_w h_u h_v\right) &= \left(\vec{e_u}\frac{1}{h_u}\frac{\partial}{\partial u}+\vec{e_v}\frac{1}{h_v}\frac{\partial}{\partial v}+\vec{e_w}\frac{1}{h_w}\frac{\partial}{\partial w}\right)\left(V_w h_u h_v\right)\\ &= \vec{e_u}\frac{1}{h_u}\frac{\partial\left(V_w h_u h_v\right)}{\partial u}+\vec{e_v}\frac{1}{h_v}\frac{\partial\left(V_w h_u h_v\right)}{\partial v}+\vec{e_w}\frac{1}{h_w}\frac{\partial\left(V_w h_u h_v\right)}{\partial w}\end{aligned} \tag{38}$$

Alors l'Équation (37) devient

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}\cdot\left(V_w\vec{e_w}\right) &= \vec{\nabla}\left(V_w h_u h_v\right)\cdot\left(\frac{1}{h_u h_v}\vec{e_w}\right)\\ &= \left(\vec{e_u}\frac{1}{h_u}\frac{\partial\left(V_w h_u h_v\right)}{\partial u}+\vec{e_v}\frac{1}{h_v}\frac{\partial\left(V_w h_u h_v\right)}{\partial v}+\vec{e_w}\frac{1}{h_w}\frac{\partial\left(V_w h_u h_v\right)}{\partial w}\right)\cdot\left(\frac{1}{h_u h_v}\vec{e_w}\right)\end{aligned}$$

Finalement,

$$\vec{\nabla}\cdot\left(V_w\vec{e_w}\right)=\frac{1}{h_u h_v h_w}\left(\frac{\partial\left(V_w h_u h_v\right)}{\partial v}\right) \tag{39}$$

□

1. L'expression de la divergence du vecteur $\vec{V}$, notée $\vec{\nabla}\cdot\vec{V}$ se trouve en utilisant les Équations (33), (36) et (39) du **Lemme 3.** On a :

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}\cdot\vec{V} &= \vec{\nabla}\cdot\left(V_u\vec{e_u}+V_v\vec{e_v}+V_w\vec{e_w}\right)\\ &= \vec{\nabla}\cdot\left(V_u\vec{e_u}\right)+\vec{\nabla}\cdot\left(V_v\vec{e_v}\right)+\vec{\nabla}\cdot\left(V_w\vec{e_w}\right)\\ &= \frac{1}{h_u h_v h_w}\left(\frac{\partial\left(V_u h_v h_w\right)}{\partial u}\right)+\frac{1}{h_u h_v h_w}\left(\frac{\partial\left(V_v h_u h_w\right)}{\partial v}\right)+\frac{1}{h_u h_v h_w}\left(\frac{\partial\left(V_w h_u h_v\right)}{\partial v}\right)\\ &= \frac{1}{h_u h_v h_w}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(h_v h_w V_u\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(h_u h_w V_v\right)+\frac{\partial}{\partial w}\left(h_u h_v V_w\right)\right]\end{aligned}$$

2. En utilisant la formule (23) ainsi que les facteurs d'échelle $h_x = h_y = h_z = 1$, on obtient la divergence $\vec{\nabla} \cdot \vec{V}$ d'un champ de vecteur $\vec{V}$ en coordonnées cartésiennes :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_z}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \tag{40}$$

3. En utilisant la formule (23) et les facteurs d'échelle $h_r = 1$, $h_\theta = r$ et $h_z = 1$, on obtient l'expression de la divergence d'un champ de vecteur $\vec{V}$ en coordonnées cylindriques :

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{V} &= \frac{1}{h_r h_\theta h_z} \left[\frac{\partial}{\partial r}(h_\theta h_z V_r) + \frac{\partial}{\partial \theta}(h_r h_z V_\theta) + \frac{\partial}{\partial z}(h_r h_\theta V_z) \right] \\ &= \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r}(r V_r) + \frac{\partial}{\partial \theta}(V_\theta) + \frac{\partial}{\partial z}(r V_z) \right] \\ &= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r V_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \end{aligned} \tag{41}$$

4. En utilisant la formule (23) et les facteurs d'échelle $h_r = 1$, $h_\theta = r$ et $h_\varphi = r \sin\theta$, on obtient la formule de la divergence en coordonnées sphériques :

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{V} &= \frac{1}{h_r h_\theta h_\varphi} \left[\frac{\partial}{\partial r}(h_\theta h_\varphi V_r) + \frac{\partial}{\partial \theta}(h_r h_\varphi V_\theta) + \frac{\partial}{\partial \varphi}(h_r h_\theta V_\varphi) \right] \\ &= \frac{1}{r^2 \sin\theta} \left[\sin\theta \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 V_r\right) + \frac{\partial}{\partial \theta} r (\sin\theta V_\theta) + \frac{\partial}{\partial z} r (V_z) \right] \\ &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 V_r\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta V_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} \end{aligned} \tag{42}$$

Rotationnel

L'expression du rotationnel $\vec{\nabla} \wedge \vec{V}$ du vecteur $\vec{V}$ dans la base $(\vec{e_u}, \vec{e_v}, \vec{e_w})$ s'écrit :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{V} = \frac{1}{h_u h_v h_w} \begin{vmatrix} h_u \vec{e_u} & h_v \vec{e_v} & h_w \vec{e_w} \\ \dfrac{\partial}{\partial u} & \dfrac{\partial}{\partial v} & \dfrac{\partial}{\partial w} \\ h_u V_u & h_v V_v & h_w V_w \end{vmatrix} \tag{43}$$

2. En utilisant la formule (43) ainsi que le calcul des facteurs d'échelle $h_x := 1$, $h_y = 1$ et $h_z = 1$, on obtient l'expression du rotationnel en coordonnées cartésiennes, i.e.

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{V} := \left[\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z} \right] \vec{e_x} + \left[\frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x} \right] \vec{e_y} + \left[\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \right] \vec{e_z} \tag{44}$$

3. En utilisant la formule (43) et les facteurs d'échelle $h_r = 1$, $h_\theta = r$ et $h_z = 1$, on obtient l'expression en coordonnées cylindriques :

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \wedge \vec{V} = \; & \frac{1}{h_\theta h_z} \left[\frac{\partial}{\partial \theta}(h_z V_z) - \frac{\partial}{\partial z}(h_\theta V_\theta) \right] \vec{e_r} + \frac{1}{h_r h_z} \left[\frac{\partial}{\partial z}(h_r V_r) - \frac{\partial}{\partial r}(h_z V_z) \right] \vec{e_\theta} \\ & + \frac{1}{h_r h_\theta} \left[\frac{\partial}{\partial r}(h_\theta V_\theta) - \frac{\partial}{\partial \theta}(h_r V_r) \right] \vec{e_z} \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\nabla}\wedge\overrightarrow{V} &= \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\left(V_z\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(rV_\theta\right)\right]\overrightarrow{e_r}+\left[\frac{\partial}{\partial z}\left(V_r\right)-\frac{\partial}{\partial r}\left(V_z\right)\right]\overrightarrow{e_\theta}\\ &\quad +\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(rV_\theta\right)-\frac{\partial}{\partial\theta}\left(V_r\right)\right]\overrightarrow{e_z}\end{aligned}$$

On trouve finalement :

$$\overrightarrow{\nabla}\wedge\overrightarrow{V}=\left[\frac{1}{r}\frac{\partial V_z}{\partial\theta}-\frac{\partial V_\theta}{\partial z}\right]\overrightarrow{e_r}+\left[\frac{\partial V_r}{\partial z}-\frac{\partial V_z}{\partial r}\right]\overrightarrow{e_\theta}+\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rV_\theta)-\frac{\partial V_r}{\partial\theta}\right]\overrightarrow{e_z} \tag{45}$$

4. En utilisant la formule (43) on obtient l'expression du rotationnel en coordonnées sphériques :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\nabla}\wedge\overrightarrow{V} &= \frac{1}{h_\theta h_\varphi}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\left(h_\varphi V_\varphi\right)-\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(h_\theta V_\theta\right)\right]\overrightarrow{e_r}+\frac{1}{h_r h_\varphi}\left[\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(h_r V_r\right)-\frac{\partial}{\partial r}\left(h_\varphi V_\varphi\right)\right]\overrightarrow{e_\theta}\\ &\quad +\frac{1}{h_r h_\theta}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(h_\theta V_\theta\right)-\frac{\partial}{\partial\theta}\left(h_r V_r\right)\right]\overrightarrow{e_\varphi}\end{aligned}$$

En considérant les facteurs d'échelle et les facteurs d'échelle $h_r = 1$, $h_\theta = r$ et $h_\varphi = r\sin\theta$, on obtient :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\nabla}\wedge\overrightarrow{V} &= \frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\left(r\sin\theta V_\varphi\right)-\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(rV_\theta\right)\right]\overrightarrow{e_r}\\ &\quad +\frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(V_r\right)-\frac{\partial}{\partial r}\left(r\sin\theta V_\varphi\right)\right]\overrightarrow{e_\theta}\\ &\quad +\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(rV_\theta\right)-\frac{\partial}{\partial\theta}\left(V_r\right)\right]\overrightarrow{e_\varphi}\end{aligned}$$

Finalement :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\nabla}\wedge\overrightarrow{V} &= \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta V_\varphi)-\frac{\partial V_\theta}{\partial\varphi}\right]\overrightarrow{e_r}+\frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial V_r}{\partial\varphi}-\frac{\partial}{\partial r}(rV_\varphi)\right]\overrightarrow{e_\theta}\\ &\quad +\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rV_\theta)-\frac{\partial V_r}{\partial\theta}\right]\overrightarrow{e_\varphi}\end{aligned} \tag{46}$$