Première Partie : Calcul Vectoriel

Double produit vectoriel

1. On utilise la formule du déterminent en dimension trois :

$$\begin{vmatrix} \overrightarrow{e_x} & u_x & v_x \\ \overrightarrow{e_y} & u_y & v_y \\ \overrightarrow{e_z} & u_z & v_z \end{vmatrix} = \overrightarrow{e_x} \begin{vmatrix} u_y & v_y \\ u_z & v_z \end{vmatrix} - \overrightarrow{e_y} \begin{vmatrix} u_x & v_x \\ u_z & v_z \end{vmatrix} + \overrightarrow{e_z} \begin{vmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{vmatrix} \tag{1}$$

et les formules du déterminent en dimension deux :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \begin{vmatrix} u_y & v_y \\ u_z & v_z \end{vmatrix} & = & u_y v_z - u_z v_y, \\ \\ \begin{vmatrix} u_x & v_x \\ u_z & v_z \end{vmatrix} & = & u_x v_z - u_z v_x, \\ \\ \begin{vmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{vmatrix} & = & u_x v_y - u_y v_x \end{array} \right. \tag{2}$$

En utilisant (2), l'Équation (1) devient :

$$\begin{array}{rcl} \begin{vmatrix} \overrightarrow{e_x} & u_x & v_x \\ \overrightarrow{e_y} & u_y & v_y \\ \overrightarrow{e_z} & u_z & v_z \end{vmatrix} & = & (u_y v_z - u_z v_y)\,\overrightarrow{e_x} - (u_x v_z - u_z v_x)\,\overrightarrow{e_y} + (u_x v_y - u_y v_x)\,\overrightarrow{e_z} \\ & = & (u_y v_z - u_z v_y)\,\overrightarrow{e_x} + (u_z v_x - u_x v_z)\,\overrightarrow{e_y} + (u_x v_y - u_y v_x)\,\overrightarrow{e_z} \end{array}$$

Finalement,

$$\begin{vmatrix} \overrightarrow{e_x} & u_x & v_x \\ \overrightarrow{e_y} & u_y & v_y \\ \overrightarrow{e_z} & u_z & v_z \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} u_y v_z - u_z v_y \\ u_z v_x - u_x v_z \\ u_x v_y - u_y v_x \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = \vec{u} \wedge \vec{v} \tag{3}$$

où l'on note $\mathcal{B} := (\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$ la base cartésienne.

2. On calcul l'expression de $\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w})$ dans la base cartésienne $\mathcal{B} := (\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$. Dans un premier temps, on calcul le produit vectoriel $\vec{v} \wedge \vec{w}$:

$$\vec{v} \wedge \vec{w} := \begin{pmatrix} v_y w_z - v_z w_y \\ v_z w_x - v_x w_z \\ v_x w_y - v_y w_x \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

On note $\vec{r} := \vec{v} \wedge \vec{w}$, tel que $\vec{r} = r_x \overrightarrow{e_x} + r_y \overrightarrow{e_y} + r_z \overrightarrow{e_z}$ avec

$$\left\{ \begin{array}{rcl} r_x & = & v_y w_z - v_z w_y \\ r_y & = & v_z w_x - v_x w_z \\ r_z & = & v_x w_y - v_y w_x \end{array} \right.$$

[1]Dimitri Vey, EISTI – Ecole Internationale des Sciences et Techniques de l'Information

On calcul le produit vectoriel $\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) = \vec{u} \wedge \vec{r}$

$$\vec{u} \wedge \vec{r} = \begin{pmatrix} u_y r_z - u_z r_y \\ u_z r_x - u_x r_z \\ u_x r_y - u_y r_x \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} u_y\left(v_x w_y - v_y w_x\right) - u_z\left(v_z w_x - v_x w_z\right) \\ u_z\left(v_y w_z - v_z w_y\right) - u_x\left(v_x w_y - v_y w_x\right) \\ u_x\left(v_z w_x - v_x w_z\right) - u_y\left(v_y w_z - v_z w_y\right) \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

Ainsi,

$$\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) = \begin{pmatrix} u_y v_x w_y - u_y v_y w_x - u_z v_z w_x + u_z v_x w_z \\ u_z v_y w_z - u_z v_z w_y - u_x v_x w_y + u_x v_y w_x \\ u_x v_z w_x - u_x v_x w_z - u_y v_y w_z + u_y v_z w_y \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \tag{4}$$

3. On donne les expressions de $(\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v}$ et $(\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{w}$ dans la base $\mathcal{B} := (\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$. On a $(\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v} = (u_x w_x + u_y w_y + u_z w_z)\left(v_x \overrightarrow{e_x} + v_y \overrightarrow{e_y} + v_z \overrightarrow{e_z}\right)$. Ainsi :

$$(\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v} = \begin{pmatrix} (u_x w_x + u_y w_y + u_z w_z)\, v_x \\ (u_x w_x + u_y w_y + u_z w_z)\, v_y \\ (u_x w_x + u_y w_y + u_z w_z)\, v_z \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} u_x v_x w_x + u_y v_x w_y + u_z v_x w_z \\ u_x v_y w_x + u_y v_y w_y + u_z v_y w_z \\ u_x v_z w_x + u_y v_z w_y + u_z v_z w_z \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

De plus, $(\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{w} = (u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z)\left(w_x \overrightarrow{e_x} + w_y \overrightarrow{e_y} + w_z \overrightarrow{e_z}\right)$

$$(\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{w} = \begin{pmatrix} (u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z)\, w_x \\ (u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z)\, w_y \\ (u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z)\, w_z \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} u_x v_x w_x + u_y v_y w_x + u_z v_z w_x \\ u_x v_x w_y + u_y v_y w_y + u_z v_z w_y \\ u_x v_x w_z + u_y v_y w_z + u_z v_z w_z \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

4. On déduit la première relation du double produit vectoriel :

$$\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{w} \tag{5}$$

En effet,

$$\begin{aligned} (\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{w} &= \begin{pmatrix} u_y v_x w_y + u_z v_x w_z - \left(u_y v_y w_x + u_z v_z w_x\right) \\ u_x v_y w_x + u_z v_y w_z - \left(u_x v_x w_y + u_z v_z w_y\right) \\ u_x v_z w_x + u_y v_z w_y - \left(u_x v_x w_z + u_y v_y w_z\right) \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \\ &= \begin{pmatrix} u_y v_x w_y - u_y v_y w_x - u_z v_z w_x + u_z v_x w_z \\ u_x v_y w_x - u_x v_x w_y - u_z v_z w_y + u_z v_y w_z \\ u_x v_z w_x - u_x v_x w_z - u_y v_y w_z + u_y v_z w_y \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \\ &= \vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) \end{aligned}$$

5. Donner l'expression de $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w}$ dans la base cartésienne $\mathcal{B} := (\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$. Dans un premier temps, on calcul le produit vectoriel $\vec{u} \wedge \vec{v}$:

$$\vec{u} \wedge \vec{v} := \begin{pmatrix} u_y v_z - u_z v_y \\ u_z v_x - u_x v_z \\ u_x v_y - u_y v_x \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \tag{6}$$

On note $\vec{s} := \vec{u} \wedge \vec{v}$, tel que $\vec{s} = s_x \overrightarrow{e_x} + s_y \overrightarrow{e_y} + s_z \overrightarrow{e_z}$, avec

$$\left\{ \begin{array}{lcl} s_x &=& u_y v_z - u_z v_y \\ s_y &=& u_z v_x - u_x v_z \\ s_z &=& u_x v_y - u_y v_x \end{array} \right. \tag{7}$$

On calcul le produit vectoriel $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w} = \vec{s} \wedge \vec{w}$

$$\vec{s} \wedge \vec{w} \quad = \quad \begin{pmatrix} s_y w_z - s_z w_y \\ s_z w_x - s_x w_z \\ s_x w_y - s_y w_x \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} (u_z v_x - u_x v_z)\, w_z - (u_x v_y - u_y v_x)\, w_y \\ (u_x v_y - u_y v_x)\, w_x - (u_y v_z - u_z v_y)\, w_z \\ (u_y v_z - u_z v_y)\, w_y - (u_z v_x - u_x v_z)\, w_x \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

Ainsi,

$$(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w} = \begin{pmatrix} u_z v_x w_z - u_x v_z w_z - u_x v_y w_y + u_y v_x w_y \\ u_x v_y w_x - u_y v_x w_x - u_y v_z w_z + u_z v_y w_z \\ u_y v_z w_y - u_z v_y w_y - u_z v_x w_x + u_x v_z w_x \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \tag{8}$$

6. Donner les expressions de $(\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v}$ et $(\vec{v} \cdot \vec{w})\vec{u}$ dans la base $\mathcal{B}$. En premier, on a :

$$(\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v} \quad = \quad \begin{pmatrix} u_x v_x w_x + u_y v_x w_y + u_z v_x w_z \\ u_x v_y w_x + u_y v_y w_y + u_z v_y w_z \\ u_x v_z w_x + u_y v_z w_y + u_z v_z w_z \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

En second, on a :

$$\begin{aligned} (\vec{v} \cdot \vec{w})\vec{u} &= (v_x w_x + v_y w_y + v_z w_z)\,(u_x \overrightarrow{e_x} + u_y \overrightarrow{e_y} + u_z \overrightarrow{e_z}) \\ &= \begin{pmatrix} (v_x w_x + v_y w_y + v_z w_z)\, u_x \\ (v_x w_x + v_y w_y + v_z w_z)\, u_y \\ (v_x w_x + v_y w_y + v_z w_z)\, u_z \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} v_x w_x u_x + v_y w_y u_x + v_z w_z u_x \\ v_x w_x u_y + v_y w_y u_y + v_z w_z u_y \\ v_x w_x u_z + v_y w_y u_z + v_z w_z u_z \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \end{aligned}$$

7. En déduire la deuxième relation du double produit vectoriel :

$$(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w} = (\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v} - (\vec{v} \cdot \vec{w})\vec{u} \tag{9}$$

En effet,

$$\begin{aligned} (\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v} - (\vec{v} \cdot \vec{w})\vec{u} &= \begin{pmatrix} u_y v_x w_y + u_z v_x w_z - v_y w_y u_x - v_z w_z u_x \\ u_x v_y w_x + u_z v_y w_z - v_x w_x u_y - v_z w_z u_y \\ u_x v_z w_x + u_y v_z w_y - v_x w_x u_z - v_y w_y u_z \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \\ &= \begin{pmatrix} u_z v_x w_z - u_x v_z w_z - u_x v_y w_y + u_y v_x w_y \\ u_x v_y w_x - u_y v_x w_x - u_y v_z w_z + u_z v_y w_z \\ u_y v_z w_y - u_z v_y w_y - u_z v_x w_x + u_x v_z w_x \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \\ &= (\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w} \end{aligned}$$

8. On utilise la relation (5). Ainsi,

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) &=& (\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{w} \\ \vec{w} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{v}) &=& (\vec{w} \cdot \vec{v})\vec{u} - (\vec{w} \cdot \vec{u})\vec{v} \\ \vec{v} \wedge (\vec{w} \wedge \vec{u}) &=& (\vec{v} \cdot \vec{u})\vec{w} - (\vec{v} \cdot \vec{w})\vec{u} \end{array} \right. \tag{10}$$

On note $\vec{z} = \vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) + \vec{w} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{v}) + \vec{v} \wedge (\vec{w} \wedge \vec{u})$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \vec{z} &= (\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{w} + (\vec{w} \cdot \vec{v})\vec{u} - (\vec{w} \cdot \vec{u})\vec{v} + (\vec{v} \cdot \vec{u})\vec{w} - (\vec{v} \cdot \vec{w})\vec{u} \\ &= (\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v} - (\vec{w} \cdot \vec{u})\vec{v} + (\vec{v} \cdot \vec{u})\vec{w} - (\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{w} + (\vec{w} \cdot \vec{v})\vec{u} - (\vec{v} \cdot \vec{w})\vec{u} \\ &= \vec{0} \end{aligned}$$

En utilisant la base cartésienne, on montrerque le produit vectoriel vérifie l'identité de Jacobi en détaillant toutes les expressions. On a

$$\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) = \begin{pmatrix} u_y v_x w_y - u_y v_y w_x - u_z v_z w_x + u_z v_x w_z \\ u_z v_y w_z - u_z v_z w_y - u_x v_x w_y + u_x v_y w_x \\ u_x v_z w_x - u_x v_x w_z - u_y v_y w_z + u_y v_z w_y \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

$$\vec{w} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{v}) = \begin{pmatrix} w_y u_x v_y - w_y u_y v_x - w_z u_z v_x + w_z u_x v_z \\ w_z u_y v_z - w_z u_z v_y - w_x u_x v_y + w_x u_y v_x \\ w_x u_z v_x - w_x u_x v_z - w_y u_y v_z + w_y u_z v_y \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

$$\vec{v} \wedge (\vec{w} \wedge \vec{u}) = \begin{pmatrix} v_y w_x u_y - v_y w_y u_x - v_z w_z u_x + v_z w_x u_z \\ v_z w_y u_z - v_z w_z u_y - v_x w_x u_y + v_x w_y u_x \\ v_x w_z u_x - v_x w_x u_z - v_y w_y u_z + v_y w_z u_y \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

On note $\vec{z} = \vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) + \vec{w} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{v}) + \vec{v} \wedge (\vec{w} \wedge \vec{u})$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
\vec{z} \;=\; & (u_y v_x w_y - u_y v_y w_x - u_z v_z w_x + u_z v_x w_z)\,\overrightarrow{e_x} \\
& + (w_y u_x v_y - w_y u_y v_x - w_z u_z v_x + w_z u_x v_z)\,\overrightarrow{e_x} \\
& + (v_y w_x u_y - v_y w_y u_x - v_z w_z u_x + v_z w_x u_z)\,\overrightarrow{e_x} \\
& + (u_z v_y w_z - u_z v_z w_y - u_x v_x w_y + u_x v_y w_x)\,\overrightarrow{e_y} \\
& + (w_z u_y v_z - w_z u_z v_y - w_x u_x v_y + w_x u_y v_x)\,\overrightarrow{e_y} \\
& + (v_z w_y u_z - v_z w_z u_y - v_x w_x u_y + v_x w_y u_x)\,\overrightarrow{e_y} \\
& + (u_x v_z w_x - u_x v_x w_z - u_y v_y w_z + u_y v_z w_y)\,\overrightarrow{e_z} \\
& + (w_x u_z v_x - w_x u_x v_z - w_y u_y v_z + w_y u_z v_y)\,\overrightarrow{e_z} \\
& + (v_x w_z u_x - v_x w_x u_z - v_y w_y u_z + v_y w_z u_y)\,\overrightarrow{e_z} \\
\vec{z} \;=\; & ((u_y v_x w_y - w_y u_y v_x) + (u_z v_x w_z - w_z u_z v_x))\,\overrightarrow{e_x} \\
& + ((w_y u_x v_y - v_y w_y u_x) + (w_z u_x v_z - v_z w_z u_x))\,\overrightarrow{e_x} \\
& + ((v_y w_x u_y - u_y v_y w_x) + (v_z w_x u_z - u_z v_z w_x))\,\overrightarrow{e_x} \\
& + ((u_z v_y w_z - w_z u_z v_y) + (u_x v_y w_x - w_x u_x v_y))\,\overrightarrow{e_y} \\
& + ((w_z u_y v_z - v_z w_z u_y) + (w_x u_y v_x - v_x w_x u_y))\,\overrightarrow{e_y} \\
& + ((v_z w_y u_z - u_z v_z w_y) + (v_x w_y u_x - u_x v_x w_y))\,\overrightarrow{e_y} \\
& + ((u_x v_z w_x - w_x u_x v_z) + (u_y v_z w_y - w_y u_y v_z))\,\overrightarrow{e_z} \\
& + ((w_x u_z v_x - v_x w_x u_z) + (w_y u_z v_y - v_y w_y u_z))\,\overrightarrow{e_z} \\
& + ((v_x w_z u_x - u_x v_x w_z) + (v_y w_z u_y - u_y v_y w_z))\,\overrightarrow{e_z}
\end{aligned}$$

Donc $\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) + \vec{w} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{v}) + \vec{v} \wedge (\vec{w} \wedge \vec{u}) = \vec{0}$.

Produit mixte

On définit le *produit mixte* de trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$, noté $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$, tel que :

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] := (\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w}$$

1. On a le calcul suivant :

$$\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = u_x \begin{vmatrix} v_y & w_y \\ v_z & w_z \end{vmatrix} - u_y \begin{vmatrix} v_x & w_x \\ v_z & w_z \end{vmatrix} + u_z \begin{vmatrix} v_x & w_x \\ v_y & w_y \end{vmatrix}$$

Donc,

$$\begin{aligned}
\det(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) &= u_x\left(v_y w_z - v_z w_y\right) - u_y\left(v_x w_z - v_z w_x\right) + u_z\left(v_x w_y - w_x v_y\right)\\
&= u_x v_y w_z - u_x v_z w_y - u_y v_x w_z + u_y v_z w_x + u_z v_x w_y - u_z w_x v_y\\
&= \left(u_x v_y - u_y v_x\right) w_z + \left(u_z v_x - u_x v_z\right) w_y + \left(u_y v_z - u_z v_y\right) w_x\\
&= s_x w_x + s_y w_y + s_z w_z
\end{aligned}$$

avec

$$\left\{\begin{array}{lcl} s_x &=& u_y v_z - u_z v_y\\ s_y &=& u_z v_x - u_x v_z\\ s_z &=& u_x v_y - u_y v_x \end{array}\right.$$

Ainsi, $\det(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = \vec{s}\cdot\vec{w} = \vec{u}\wedge\vec{v}\cdot\vec{w}$, où

$$\vec{s} := \begin{pmatrix} s_x\\ s_y\\ s_z \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} u_y v_z - u_z v_y\\ u_z v_x - u_x v_z\\ u_x v_y - u_y v_x \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \qquad \vec{w} := \begin{pmatrix} w_x\\ w_y\\ w_z \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \tag{11}$$

2. On a le calcul suivant :

$$\det(\vec{v},\vec{w},\vec{u}) = v_x \begin{vmatrix} w_y & u_y\\ w_z & u_z \end{vmatrix} - v_y \begin{vmatrix} w_x & u_x\\ w_z & u_z \end{vmatrix} + v_z \begin{vmatrix} w_x & u_x\\ w_y & u_y \end{vmatrix}$$

On obtient :

$$\begin{aligned}
\det(\vec{v},\vec{w},\vec{u}) &= v_x\left(w_y u_z - w_z u_y\right) - v_y\left(w_x u_z - w_z u_x\right) + v_z\left(w_x u_y - u_x w_y\right)\\
&= v_x w_y u_z - v_x w_z u_y - v_y w_x u_z + v_y w_z u_x + v_z w_x u_y - v_z u_x w_y\\
&= u_x v_y w_z - u_x v_z w_y - u_y v_x w_z + u_y v_z w_x + u_z v_x w_y - u_z w_x v_y\\
&= u_x\left(v_y w_z - v_z w_y\right) - u_y\left(v_x w_z - v_z w_x\right) + u_z\left(v_x w_y - w_x v_y\right)\\
&= u_x \begin{vmatrix} v_y & w_y\\ v_z & w_z \end{vmatrix} - u_y \begin{vmatrix} v_x & w_x\\ v_z & w_z \end{vmatrix} + u_z \begin{vmatrix} v_x & w_x\\ v_y & w_y \end{vmatrix}\\
&= \begin{vmatrix} u_x & v_x & w_x\\ u_y & v_y & w_y\\ u_z & v_z & w_z \end{vmatrix}\\
&= \det(\vec{u},\vec{v},\vec{w})
\end{aligned}$$

Finalement, on trouve :

$$[\vec{u},\vec{v},\vec{w}] = \det(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = \det(\vec{v},\vec{w},\vec{u}) = [\vec{v},\vec{w},\vec{u}] \tag{12}$$

De manière analogue, on a le calcul :

$$\det(\vec{w},\vec{u},\vec{v}) = w_x \begin{vmatrix} u_y & v_y\\ u_z & v_z \end{vmatrix} - w_y \begin{vmatrix} u_x & v_x\\ u_z & v_z \end{vmatrix} + w_z \begin{vmatrix} u_x & v_x\\ u_y & v_y \end{vmatrix}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\det(\vec{w},\vec{u},\vec{v}) &= w_x\left(u_yv_z-u_zv_y\right)-w_y\left(u_xv_z-u_zv_x\right)+w_z\left(u_xv_y-v_xu_y\right)\\
&= w_xu_yv_z-w_xu_zv_y-w_yu_xv_z+w_yu_zv_x+w_zu_xv_y-w_zv_xu_y\\
&= \left(w_xu_y-w_yu_x\right)v_z+\left(w_zu_x-w_xu_z\right)v_y+\left(w_yu_z-w_zu_y\right)v_x\\
&= u_xv_yw_z-u_xv_zw_y-u_yv_xw_z+u_yv_zw_x+u_zv_xw_y-u_zw_xv_y\\
&= u_x\left(v_yw_z-v_zw_y\right)-u_y\left(v_xw_z-v_zw_x\right)+u_z\left(v_xw_y-w_xv_y\right)\\
&= u_x\begin{vmatrix} v_y & w_y\\ v_z & w_z\end{vmatrix}-u_y\begin{vmatrix} v_x & w_x\\ v_z & w_z\end{vmatrix}+u_z\begin{vmatrix} v_x & w_x\\ v_y & w_y\end{vmatrix}\\
&= \begin{vmatrix} u_x & v_x & w_x\\ u_y & v_y & w_y\\ u_z & v_z & w_z\end{vmatrix}\\
&= \det(\vec{u},\vec{v},\vec{w})
\end{aligned}$$

Finalement,

$$[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]=\det(\vec{u},\vec{v},\vec{w})=\det(\vec{w},\vec{u},\vec{v})=[\vec{w},\vec{u},\vec{v}] \tag{13}$$

3. Comme le produit vectoriel est antisymétrique $\vec{u}\wedge\vec{v}=-\vec{v}\wedge\vec{u}$, on a :

$$[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]=(\vec{u}\wedge\vec{v})\cdot\vec{w}=-(\vec{v}\wedge\vec{u})\cdot\vec{w}=-[\vec{v},\vec{u},\vec{w}]$$

En utilisant les Équations (12) et (14), on obtient :

$$[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]=-[\vec{v},\vec{u},\vec{w}]=-[\vec{u},\vec{w},\vec{v}] \tag{14}$$

Seconde Partie : Mouvement à accélération centrale

Vitesse aréolaire et Loi des aires

1. On a :

$$\frac{d\vec{C}}{dt}=\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\wedge\vec{v}+\overrightarrow{OM}\wedge\frac{d\vec{v}}{dt}=\vec{v}\wedge\vec{v}+\overrightarrow{OM}\wedge\vec{a}$$

Comme $\vec{v}\wedge\vec{v}=0$ (le produit vectoriel est antisymétrique) alors

$$\frac{d\vec{C}}{dt}=\overrightarrow{OM}\wedge\vec{a}=\vec{0}. \tag{15}$$

en utilisant la propriété d'un mouvement à force centrale, i.e. $\overrightarrow{OM}\wedge\vec{a}=\vec{0}$.
2. Le vecteur vitesse aréolaire est une constante du mouvement : $d\vec{C}/dt=\vec{0}$. À tout instant t, on a $\vec{C}=\overrightarrow{OM}\wedge\vec{a}$, donc $\vec{C}\perp\overrightarrow{OM}$. Au cours du mouvement, le vecteur position $\overrightarrow{OM}$ est donc perpendiculare à un vecteur constant, donc à une direction fixe. Ainsi $\overrightarrow{OM}$ appartient à un plan. On considère le plan du mouvement comme étant celui généré par la base $(\overrightarrow{e_x},\overrightarrow{e_y})$.
3. Dans la base polaire, on a : $\overrightarrow{OM}=r\overrightarrow{e_r}$ et $\vec{v}=\dot{r}\overrightarrow{e_r}+r\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta}$. Le vecteur vitesse aréolaire $\vec{C}:=\overrightarrow{OM}\wedge\vec{v}$ s'écrit donc

$$\vec{C}:=(r\overrightarrow{e_r})\wedge(\dot{r}\overrightarrow{e_r}+r\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta})=r\dot{r}\overrightarrow{e_r}\wedge\overrightarrow{e_r}+r^2\dot{\theta}\overrightarrow{e_r}\wedge\overrightarrow{e_\theta}$$

On sait que $\overrightarrow{e_r} \wedge \overrightarrow{e_r} = 0$ et $\overrightarrow{e_r} \wedge \overrightarrow{e_\theta} = \overrightarrow{e_z}$. Ainsi :

$$\overrightarrow{C} := r^2\dot{\theta}\overrightarrow{e_z} = r^2\frac{d\theta}{dt}\overrightarrow{e_z} \tag{16}$$

Finalement, $\overrightarrow{C} := C\overrightarrow{e_z}$ avec $C = r^2 d\theta/dt = r^2\dot{\theta}$.
4. À un instant t, le vecteur position est $\overrightarrow{OM}$, à un instant ultérieur $t+dt$, le vecteur position est $\overrightarrow{OM'}(t+dt)$. L'aire est celle du triangle OMM' s'écrit :

$$d\mathcal{S} = \frac{1}{2}r(r+dr)\sin(d\theta) = \frac{1}{2}\left(r^2 d\theta + r dr d\theta\right)$$

où on utilise $\lim\limits_{\alpha\to 0}\left(\dfrac{\sin\alpha}{\alpha}\right) = 1$, et on confond $\sin(d\theta)$ avec $d\theta$. Finalement, on néglige le second terme en $\frac{1}{2}r dr d\theta$. Au premier ordre on trouve

$$d\mathcal{S} = \frac{1}{2}r^2 d\theta. \tag{17}$$

5. L'expression de la constante de la Loi des aires s'écrit :

$$C = r^2\frac{d\theta}{dt} = 2\frac{d\mathcal{S}}{dt} \tag{18}$$

Formules de Binet

1. Le vecteur position dans la base polaire est $\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{e_r}$. On a

$$\frac{d\overrightarrow{e_r}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{e_r}}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\overrightarrow{e_\theta}$$

Ainsi, Le vecteur vitesse est donné par :

$$\vec{v} \;:=\; \left.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right|_{\mathcal{R}} = \left.\frac{d}{dt}\left(r\overrightarrow{e_r}\right)\right|_{\mathcal{R}} = \frac{dr}{dt}\overrightarrow{e_r} + r\frac{d\overrightarrow{e_r}}{dt} = \frac{dr}{dt}\overrightarrow{e_r} + r\frac{d\theta}{dt}\overrightarrow{e_\theta} \tag{19}$$

ou de manière équivalente $\vec{v} = \dot{r}\overrightarrow{e_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta}$.
2. La norme du vecteur vitesse $v = \|\vec{v}\|$ est :

$$v = \sqrt{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \left(r\frac{d\theta}{dt}\right)^2} = \sqrt{(\dot{r}^2) + (r\dot{\theta})^2} \tag{20}$$

3. On démontre la première formule de Binet. La formule (20) nous donne :

$$v^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \left(r\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 \tag{21}$$

On remarque que

$$\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{r}\right) \;=\; \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r}\right)\frac{dt}{d\theta} = -\frac{1}{r^2}\frac{dr}{dt}\frac{dt}{d\theta} = -\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\theta} \tag{22}$$

Donc
$$\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\theta} = -\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{r}\right). \tag{23}$$
De plus :
$$\left\{\begin{array}{lcl} \dfrac{d\theta}{dt} & = & \dfrac{C}{r^2} \\[2ex] \dfrac{dr}{dt} & = & \dfrac{dr}{d\theta}\dfrac{d\theta}{dt} = \dfrac{dr}{d\theta}\dfrac{C}{r^2} \end{array}\right. \tag{24}$$
Ainsi, $v = \|\vec{v}\|$, donnée par l'Équation (21) s'écrit :
$$v^2 \;=\; \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \left(r\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{C^2}{r^4}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2\frac{C^2}{r^4} = C^2\left[\left(\frac{1}{r}\right)^2 + \left(\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{r}\right)\right)^2\right]$$

4. L'expression de l'accélération en coordonnées polaires est :
$$\vec{a} = \left.\frac{d\vec{v}}{dt}\right|_{\mathcal{R}} = \frac{d}{dt}\left.\left(\dot{r}\overrightarrow{e_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta}\right)\right|_{\mathcal{R}} = \ddot{r}\overrightarrow{e_r} + \dot{r}\frac{d\overrightarrow{e_r}}{dt} + \dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} + r\dot{\theta}\frac{d\overrightarrow{e_\theta}}{dt} \tag{25}$$
Comme,
$$\left\{\begin{array}{lcl} \dfrac{d\overrightarrow{e_r}}{dt} & = & \dfrac{d\overrightarrow{e_r}}{d\theta}\dfrac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta} \\[2ex] \dfrac{d\overrightarrow{e_\theta}}{dt} & = & \dfrac{d\overrightarrow{e_\theta}}{d\theta}\dfrac{d\theta}{dt} = -\dot{\theta}\overrightarrow{e_r} \end{array}\right. \tag{26}$$
on obtient :
$$\vec{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\overrightarrow{e_r} + \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right)\overrightarrow{e_\theta} \tag{27}$$
ou encore $\vec{a} = a_r\overrightarrow{e_r} + a_\theta\overrightarrow{e_\theta}$, avec $a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$ et $a_\theta = 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}$. La composante selon $\overrightarrow{e_\theta}$ est nulle car nous sommes dans le cadre d'un mouvement à accélération centrale. On peut le vérifier :
$$a_r \;=\; 2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + r\frac{d^2\theta}{dt^2} = 2\frac{dr}{d\theta}\frac{C}{r^2} + r\frac{d}{dt}\left(\frac{C}{r^2}\right) = 2C\frac{1}{r}\frac{dr}{d\theta} - \frac{r}{r^3}C\frac{dr}{dt} = 0. \tag{28}$$
Finalement, comme
$$\frac{d^2r}{dt^2} \;=\; \frac{d}{dt}\left(\frac{dr}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}\right) = \frac{d}{d\theta}\left(\frac{dr}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}\right)\frac{d\theta}{dt} = -C^2\frac{1}{r^2}\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right) \tag{29}$$
et aussi
$$-r\dot{\theta}^2 \;=\; -r\frac{C^2}{r^4} = -\frac{C^2}{r^2}\frac{1}{r} \tag{30}$$
En utilisant (29) et (30), on obtient la seconde formule de Binet :
$$\vec{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\overrightarrow{e_r} = -\frac{C^2}{r^2}\left[\frac{1}{r} + \frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right)\right]\overrightarrow{e_r} \tag{31}$$