Première Partie : Calcul Vectoriel

Dans l'espace euclidien de dimension 3, le produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$ et défini par $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\| \cdot \cos(\vec{u}, \vec{v})$. On décompose les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sur la base cartésienne $\mathcal{B} := (\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$.

$$\vec{u} := \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \qquad \vec{v} := \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \tag{1}$$

De façon équivalente, on écrit $\vec{u} := u_x\overrightarrow{e_x} + u_y\overrightarrow{e_y} + u_z\overrightarrow{e_z}$ et $\vec{v} := v_x\overrightarrow{e_x} + v_y\overrightarrow{e_y} + v_z\overrightarrow{e_z}$. Dans ce cas, le produit scalaire s'écrit :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} := u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z \tag{2}$$

Produit vectoriel – Dans l'espace euclidien de dimension 3, on définit le produit vectoriel de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, noté $\vec{u} \wedge \vec{v}$ comme l'unique vecteur tel que : le vecteur $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est orthogonal à $\vec{u}$ et $\vec{v}$ (on a $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{u} = (\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{v} = 0$), la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base orthonormée directe et la norme $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|$ est définie par : $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\| \mid \sin(\vec{u}, \vec{v}) \mid$. Le produit vectoriel se décompose sur la base cartésienne comme :

$$\vec{u} \wedge \vec{v} := \begin{pmatrix} u_y v_z - u_z v_y \\ u_z v_x - u_x v_z \\ u_x v_y - u_y v_x \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \tag{3}$$

ou de manière équivalente $\vec{u} \wedge \vec{v} = (u_y v_z - u_z v_y)\,\overrightarrow{e_x} + (u_z v_x - u_x v_z)\,\overrightarrow{e_y} + (u_x v_y - u_y v_x)\,\overrightarrow{e_z}$.

Déterminant en dimension 2 et 3 – Dans le plan euclidien de dimension 2, on définit le déterminant de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tel que :

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) := \begin{vmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{vmatrix} = u_x v_y - u_y v_x \tag{4}$$

Dans l'espace euclidien de dimension 3, le déterminant de trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ est défini par :

$$\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) := \begin{vmatrix} u_x & v_x & w_x \\ u_y & v_y & w_y \\ u_z & v_z & w_z \end{vmatrix} = u_x \begin{vmatrix} v_y & w_y \\ v_z & w_z \end{vmatrix} - u_y \begin{vmatrix} v_x & w_x \\ v_z & w_z \end{vmatrix} + u_z \begin{vmatrix} v_x & w_x \\ v_y & w_y \end{vmatrix} \tag{5}$$

[1] Dimitri Vey, EISTI – Ecole Internationale des Sciences et Techniques de l'Information

Double produit vectoriel

Le produit vectoriel de deux vecteurs n'est pas associatif. En particulier, $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w}$ n'est pas égal à $\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w})$. L'obstruction à l'associativité est encodée par les identités du double produit vectoriel :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) & = & (\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{w} \\ (\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w} & = & (\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v} - (\vec{v} \cdot \vec{w})\vec{u} \end{array} \right. \tag{6}$$

Nous allons utiliser la base cartésienne $\mathcal{B} := (\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$ pour démontrer les Équations (6) en utilisant les Équations (2) et (3).

1. Démontrer que

$$\vec{u} \wedge \vec{v} := \begin{vmatrix} \overrightarrow{e_x} & u_x & v_x \\ \overrightarrow{e_y} & u_y & v_y \\ \overrightarrow{e_z} & u_z & v_z \end{vmatrix} \tag{7}$$

2. Donner l'expression de $\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w})$ dans la base $\mathcal{B}$.
3. Donner les expressions de $(\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v}$ et $(\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{w}$ dans la base $\mathcal{B}$.
4. En déduire la première relation du double produit vectoriel :

$$\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{w} \tag{8}$$

5. Donner l'expression de $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w}$ dans la base $\mathcal{B}$.
6. Donner les expressions de $(\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v}$ et $(\vec{v} \cdot \vec{w})\vec{u}$ dans la base $\mathcal{B}$.
7. En déduire la deuxième relation du double produit vectoriel :

$$(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w} = (\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v} - (\vec{v} \cdot \vec{w})\vec{u} \tag{9}$$

8. Toujours en utilisant la base cartésienne, montrer que le produit vectoriel vérifie l'identité de Jacobi

$$\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) + \vec{w} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{v}) + \vec{v} \wedge (\vec{w} \wedge \vec{u}) = \vec{0} \tag{10}$$

Produit mixte

On définit le *produit mixte* de trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$, noté $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$, tel que :

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] := (\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w} \tag{11}$$

1. À l'aide de la formule du déterminant dans l'espace euclidien de dimension 3, démontrer que :

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \tag{12}$$

2. Démontrer les propriétés suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] & = & [\vec{w}, \vec{u}, \vec{v}] \\ [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] & = & [\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}] \end{array} \right. \tag{13}$$

3. Démontrer les propriétés suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] & = & -[\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}] \\ [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] & = & -[\vec{u}, \vec{w}, \vec{v}] \end{array} \right. \tag{14}$$

Seconde Partie : Mouvement à accélération centrale

Le mouvement d'un point matériel dans l'espace euclidien $\mathbb{E} := \mathbb{R}^3$ est décrit dans un référentiel $\mathcal{R} := (O, \overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$. La vitesse du point et son accélération sont définies par les formules : $\vec{v} := \vec{v}(M) = d\overrightarrow{OM}/dt\Big|_{\mathcal{R}}$ et $\vec{a} := \vec{a}(M) = d\vec{v}/dt|_{\mathcal{R}}$ où $\overrightarrow{OM}(t)$ est le vecteur position à l'instant t. Un point matériel effectue un mouvement à accélération centrale si et seulement si à chaque instant, son vecteur accélération $\vec{a}(M)$ est dirigé selon une droite qui passe par un point fixe $O \in \mathbb{E}$. Mathématiquement, on traduit cette condition par la formule :

$$\overrightarrow{OM} \wedge \vec{a} = \vec{0} \tag{15}$$

Vitesse aréolaire et Loi des aires

Le mouvement à accélération centrale se déroule suivant la Loi des aires : le vecteur position balaye toujours une aire $\Delta\mathcal{S}$ pendant le temps Δt. On introduit le vecteur vitesse aréolaire :

$$\overrightarrow{C} := \overrightarrow{OM} \wedge \vec{v} \tag{16}$$

1. Montrer que le vecteur vitesse aréolaire $\overrightarrow{C}$ (définit par l'Équation (16)) est une constante du mouvement.
2. Montrer que le mouvement est un mouvement plan. On choisira dans la suite du problème le plan du mouvement celui défini par la base cartésienne $(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y})$.
3. Exprimer le vecteur vitesse aréolaire dans la base cylindrique $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_z})$. En déduire que : $\overrightarrow{C} = C\overrightarrow{e_z}$ avec $C = r^2(d\theta/dt)$
4. On note $d\mathcal{S}$ l'aire élémentaire balayée par le vecteur position $\overrightarrow{OM}$. Expliquer pourquoi l'aire élémentaire s'écrit $d\mathcal{S} = \frac{1}{2}r^2 d\theta$.
5. Donner l'expression de la constante de la loi des aires C en fonction de $d\mathcal{S}/dt$.

Formules de Binet

1. Donner l'expression du vecteur vitesse sur la base polaire.
2. Exprimer la norme du vecteur vitesse : $v = \|v\|$
3. Démontrer la première formule de Binet :

$$v^2 = C^2 \left[\left(\frac{1}{r}\right)^2 + \left(\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{r}\right)\right)^2 \right] \tag{17}$$

4. On utilise l'expression de l'accélération en coordonnées polaires. Démontrer la seconde formule de Binet :

$$\vec{a} = -\frac{C^2}{r^2}\left[\frac{1}{r} + \frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right)\right]\overrightarrow{e_r} \tag{18}$$