Première Partie : Conduction thermique

Flux et transfert thermiques

1. Le flux thermique élémentaire $d\phi_{\text{th}}$ au travers un élément de surface $d\vec{S}$ est :

$$d\phi_{\text{th}} = \overrightarrow{j_{\text{th}}} \cdot d\vec{S} \tag{1}$$

La dimension du flux thermique élémentaire est $[d\phi_{\text{th}}] = J \cdot s^{-1} = W$.

2. Le flux thermique ϕ_{th} à travers une surface $\mathcal{S}$ est :

$$\phi_{\text{th}} = \iint_{\mathcal{S}} \overrightarrow{j_{\text{th}}} \cdot d\vec{S} \tag{2}$$

La dimension du flux thermique est $[\phi_{\text{th}}] = J \cdot s^{-1} = W$.

3. La dimension du vecteur densité de courant thermique $\overrightarrow{j_{\text{th}}}$ est :

$$[\overrightarrow{j_{\text{th}}}] = [\phi_{\text{th}}][d\vec{S}]^{-2} = J \cdot s^{-1} \cdot m^{-2} = W \cdot m^{-2} \tag{3}$$

4. La quantité de chaleur $\boldsymbol{\delta} Q := \delta^2 Q$ traversant un élément de surface $d\vec{S}$ entre l'instant t et $t + dt$ est $\boldsymbol{\delta} Q = \overrightarrow{j_{\text{th}}} \cdot d\vec{S}\, dt$. On a :

$$\boldsymbol{\delta} Q = \overrightarrow{j_{\text{th}}} \cdot \vec{n}\, dS dt = d\phi_{\text{th}} \cdot dt \tag{4}$$

5. La quantité de chaleur δQ reçue par le système Σ délimité par la surface $\mathcal{S}$, entre les instants t et $t + dt$, s'obtient en intégrant sur toute la surface la quantité de chaleur reçue $\boldsymbol{\delta} Q := \delta^2 Q_{\text{reçue}}$ au travers une surface élémentaire entre les instants t et $t + dt$.

$$\delta Q = \oiint_{\mathcal{S}} \boldsymbol{\delta} Q = -\oiint_{\mathcal{S}} \overrightarrow{j_{\text{th}}} \cdot d\vec{S}\, dt \tag{5}$$

On peut exprimer le flux thermique $\phi_{\text{th}} = \displaystyle\iint_{\mathcal{S}} d\phi_{\text{th}}$ à travers la surface $\mathcal{S}$ selon :

$$\phi_{\text{th}} = \frac{\delta Q}{dt} = \oiint_{\mathcal{S}} \frac{\boldsymbol{\delta} Q}{dt}$$

Bilan thermique –

6. La capacité thermique (à volume constant) d'un système thermodynamique est définie par :

$$C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V \tag{6}$$

La capacité thermique massique à volume constant c_V d'un système de volume $\mathcal{V}$ et de masse $m = \iiint_{\mathcal{V}} dm$ est :

$$c_V = \frac{1}{m}\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V = \frac{C_V}{m} \tag{7}$$

[1]Dimitri Vey, EISTI – Ecole Internationale des Sciences et Techniques de l'Information

Les unités sont $[C_V] = J \cdot K^{-1}$ et $[c_V] = J \cdot K^{-1} \cdot kg^{-1}$. De plus, la capacité thermique à pression constante est définie par $C_P = \left(\dfrac{\partial H}{\partial T}\right)_P$, avec $H = U + PV$ la fonction d'état enthalpie. La capacité thermique massique à pression constante est donnée par $c_P = \dfrac{1}{m}\left(\dfrac{\partial H}{\partial T}\right)_P = \dfrac{C_P}{m}$. On a $[c_P] = J \cdot K^{-1} \cdot kg^{-1}$.
Pour une phase condensée, c_V et c_P sont identiques et on parle simplement de la capacité massique $c_m = c_V = c_P$.
7. *Démonstration locale* —
On effectue un bilan d'énergie local sur un volume élémentaire $d\tau$, tel que $dm = \rho d\tau$ où $\rho = \rho(M,t)$ est la masse volumique.

Proposition — La Loi de conservation de l'énergie interne s'écrit :

$$\rho c_m \frac{\partial T}{\partial t} + \overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{j_{\mathsf{th}}} = 0 \tag{8}$$

où $T = T(M,t)$ est la température locale.

Preuve — On considère les coordonnées cartésiennes, l'élément de volume s'écrit $d\tau = dxdydz$. Le volume élémentaire $d\tau$ est délimité par 6 surfaces élémentaires. On définit les surfaces $d\overrightarrow{S}|_x = -dydz\overrightarrow{e_x}$ et $d\overrightarrow{S}|_{x+dx} = dydz\overrightarrow{e_x}$, parallèles au plan $(\overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$, les surfaces $d\overrightarrow{S}|_y = -dxdz\overrightarrow{e_y}$ et $d\overrightarrow{S}|_{y+dy} = dxdz\overrightarrow{e_y}$, parallèles au plan $(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_z})$ et finalement les surfaces $d\overrightarrow{S}_z = -dydz\overrightarrow{e_z}$ et $d\overrightarrow{S}_{z+dz} = dydz\overrightarrow{e_z}$, parallèles au plan $(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y})$. Soit la surface $dS = dS_x \cup dS_y \cup dS_z \cup dS_{x+dx} \cup dS_{y+dy} \cup dS_{z+dz}$.
La quantité de chaleur qui entre dans le volume élémentaire $d\tau$ entre le temps t et $t + dt$ est noté $\boldsymbol{\delta} Q|_{d\tau} = \delta^2 Q|_{d\tau}$. On a :

$$\boldsymbol{\delta} Q|_{d\tau} = \sum_{\mathsf{faces}} \boldsymbol{\delta} Q_{\mathsf{faces}}$$

soit :

$$\boldsymbol{\delta} Q|_{d\tau} = \boldsymbol{\delta} Q_x + \boldsymbol{\delta} Q_{x+dx} + \boldsymbol{\delta} Q_y + \boldsymbol{\delta} Q_{y+dy} + \boldsymbol{\delta} Q_z + \boldsymbol{\delta} Q_{z+dz}$$

où $\boldsymbol{\delta} Q_x$, $\boldsymbol{\delta} Q_{x+dx}$, $\boldsymbol{\delta} Q_y$, $\boldsymbol{\delta} Q_{y+dy}$, $\boldsymbol{\delta} Q_z$ et $\boldsymbol{\delta} Q_{z+dz}$ sont les quantités de chaleur qui entrent par les surfaces $d\overrightarrow{S}_x$, $d\overrightarrow{S}_{x+dx}$, $d\overrightarrow{S}_y$, $d\overrightarrow{S}_{y+dy}$, $d\overrightarrow{S}_z$ et $d\overrightarrow{S}_{z+dz}$, respectivement. Ainsi

$$\left\{\begin{array}{rcl} \boldsymbol{\delta} Q_x & = & d\phi_x\ dt = -\left(\overrightarrow{j_{\mathsf{th}}}(x,y,z,t) \cdot d\overrightarrow{S}_x\right) dt \\ \boldsymbol{\delta} Q_{x+dx} & = & d\phi_{x+dx}\ dt = -\left(\overrightarrow{j_{\mathsf{th}}}(x+dx,y,z,t) \cdot d\overrightarrow{S}_{x+dx}\right) dt \end{array}\right.$$

où l'on note $d\phi_x$et $d\phi_{x+dx}$ les flux thermiques élémentaires à travers les surfaces $d\overrightarrow{S}_x$ et $d\overrightarrow{S}_{x+dx}$. On a $\overrightarrow{j_{\mathsf{th}}}(x,y,z,t) = j_x(x,y,z,t)\overrightarrow{e_x} + j_y(x,y,z,t)\overrightarrow{e_y} + j_z(x,y,z,t)\overrightarrow{e_z}$. On a aussi

$$\left\{\begin{array}{rcl} \boldsymbol{\delta} Q_y & = & d\phi_y\ dt = -\left(\overrightarrow{j_{\mathsf{th}}}(x,y,z,t) \cdot d\overrightarrow{S}_y\right) dt \\ \boldsymbol{\delta} Q_{y+dy} & = & d\phi_{y+dy}\ dt = -\left(\overrightarrow{j_{\mathsf{th}}}(x,y+dy,z,t) \cdot d\overrightarrow{S}_{y+dy}\right) dt \end{array}\right.$$

et finalement :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\delta} Q_z &= d\phi_z \; dt = -\left(\overrightarrow{j_{\mathsf{th}}}(x,y,z,t) \cdot d\vec{S}_z\right) dt \\ \boldsymbol{\delta} Q_{z+dz} &= d\phi_{z+dz} \; dt = -\left(\overrightarrow{j_{\mathsf{th}}}(x,y,z+dz,t) \cdot d\vec{S}_{z+dz}\right) dt \end{cases}$$

On en déduit :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\delta} Q_x &= dydzj_x(x,y,z,t)dt \\ \boldsymbol{\delta} Q_{x+dx} &= -dydzj_x(x+dx,y,z,t)dt \end{cases}$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{\delta} Q_y &= dxdzj_y(x,y,z,t)dt \\ \boldsymbol{\delta} Q_{y+dy} &= -dxdzj_y(x,y+dy,z,t)dt \end{cases}$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{\delta} Q_z &= dxdyj_z(x,y,z,t)dt \\ \boldsymbol{\delta} Q_{z+dz} &= -dxdyj_z(x,y,z+dz,t)dt \end{cases}$$

où l'on note $j_x(x,y,z,t) = \overrightarrow{j_{\mathsf{th}}}(x,y,z,t) \cdot \overrightarrow{e_x}$, $j_x(x+dx,y,z,t) = \overrightarrow{j_{\mathsf{th}}}(x+dx,y,z,t) \cdot \overrightarrow{e_x}$. On utilise un développement de Taylor au premier ordre $j_x(x+dx,y,z,t) = j_x(x,y,z,t) + \frac{\partial j_x}{\partial x}dx$. On note aussi $j_y(x,y,z,t) = \overrightarrow{j_{\mathsf{th}}}(x,y,z,t) \cdot \overrightarrow{e_y}$, $j_y(x,y+dy,z,t) = \overrightarrow{j_{\mathsf{th}}}(x,y+dy,z,t) \cdot \overrightarrow{e_y}$. On utilise un développement de Taylor au premier ordre $j_y(x,y+dy,z,t) = j_y(x,y,z,t) + \frac{\partial j_y}{\partial y}dy$. Finalement, on note $j_z(x,y,z,t) = \overrightarrow{j_{\mathsf{th}}}(x,y,z,t) \cdot \overrightarrow{e_z}$, $j_x(x,y,z+dz,t) = \overrightarrow{j_{\mathsf{th}}}(x,y,z+dz,t) \cdot \overrightarrow{e_z}$ et son développement de Taylor au premier ordre $j_x(x+dx,y,z,t) = j_x(x,y,z,t) + \frac{\partial j_x}{\partial x}dx$. A la fin :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\delta} Q|_{d\tau} &= dydzj_x(x,y,z,t)dt - dydz\left(j_x(x,y,z,t) + \frac{\partial j_x}{\partial x}(x,y,z,t)dx\right)dt \\ &\quad + dxdzj_y(x,y,z,t)dt - dxdz\left(j_y(x,y,z,t) + \frac{\partial j_y}{\partial y}(x,y,z,t)dy\right)dt \\ &\quad + dxdyj_z(x,y,z,t)dt - dxdy\left(j_z(x,y,z,t) + \frac{\partial j_z}{\partial z}(x,y,z,t)dz\right)dt \end{aligned}$$

On déduit la quantité de chaleur reçue par le volume élémentaire $d\tau$:

$$\boldsymbol{\delta} Q|_{d\tau} = -\left(\frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_x}{\partial y} + \frac{\partial j_x}{\partial z}\right) d\tau dt$$

La quantité de chaleur reçue $\boldsymbol{\delta} Q := \delta^2 Q_{\mathsf{reçue}}$ par l'élément de volume élémentaire $d\tau = dxdydz$ entre les instants t et $t+dt$ est :

$$\boldsymbol{\delta} Q = -\left(\vec{\nabla} \cdot \overrightarrow{j_{\mathsf{th}}}\right) d\tau dt \tag{9}$$

De l'autre côté, on note $dU(M,t)$ et $dU(M,t+dt)$, l'énergie interne élémentaire contenue dans le volume $d\tau$ centré autour du point M, aux instants t et $t+dt$, respectivement. La densité d'énergie interne est notée $u(M,t)$, telle que $dU = u(M,t)dm$. Le premier Principe s'écrit $d(dU) = \boldsymbol{\delta} Q + \boldsymbol{\delta} W$. Pour une transformation isochore $\boldsymbol{\delta} W = 0$. Ainsi,

$$d(dU) = \boldsymbol{\delta} Q \tag{10}$$

Le premier membre de l'Équation (10) donne $d(dU) = dU(M, t+dt) - dU(M, t)$, i.e. $d(dU) = u(M, t+dt)dm - u(M, t)dm = \left(u(M, t+dt) - u(M, t)\right)\rho d\tau$. Ainsi,

$$d(dU) = \frac{\partial u}{\partial t}(M, t)\rho d\tau dt \tag{11}$$

On applique le premier Principe de la Thermodynamique (Équation (10)) en utilisant les Équation (9) et (11) :

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t}(M, t) dt d\tau = -\left(\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{j_{\mathsf{th}}}(M, t)\right) d\tau dt$$

On obtient un bilan local d'énergie interne.

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t}(M, t) + \overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{j_{\mathsf{th}}}(M, t) = 0 \tag{12}$$

On peut aussi exprimer $d(dU)$ en utilisant la capacité massique. Soit $dC := dC_V$ la capacité thermique élémentaire tel que $d(dU) = dC \cdot dT$. On a $d(dU) = \rho c_m d\tau dT$, avec $dC = c_m dm = c_m \rho d\tau$. Finalement,

$$d(dU) = \rho c_m \frac{\partial T}{\partial t}(M, t) dt d\tau \tag{13}$$

On applique le premier Principe de la Thermodynamique (Équation (10)) en utilisant les Équation (9) et (13) :

$$\rho c_m \frac{\partial T}{\partial t}(M, t) dt d\tau = -\left(\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{j_{\mathsf{th}}}(M, t)\right) d\tau dt$$

soit $\rho c_m \dfrac{\partial T}{\partial t}(M, t) + \overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{j_{\mathsf{th}}}(M, t) = 0$. □

8. *Démonstration intégrale* —
On effectue un bilan thermique sur le système thermodynamique Σ constitué par un volume $\mathcal{V}$, délimité par une surface fermé $\mathcal{S}$.

Proposition — La Loi de conservation de l'énergie interne sous forme intégrale est :

$$\iiint_{\mathcal{V}} \left(\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{j_{\mathsf{th}}}\right) d\tau = 0$$

où $u = u(M, t)$ est l'énergie interne massique au point M, ρ est la masse volumique et $\overrightarrow{j_{\mathsf{th}}}$ est le vecteur densité de flux thermique. On obtient aussi la Loi de conservation sous la forme

$$\iiint_{\mathcal{V}} \left(\rho c_m \frac{\partial T}{\partial t} + \overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{j_{\mathsf{th}}}\right) d\tau = 0$$

Preuve — Le premier Principe de la Thermodynamique s'écrit :

$$dU = \delta Q + \delta W \tag{14}$$

où dU est la variation d'énergie interne du système, δQ et δW sont les énergies reçues par le système Σ sous forme de chaleur et de travail, repsectivement. Dans le cadre des transformations isochores on a :

$$dU = \delta Q \tag{15}$$

où dU est la variation d'énergie interne du système Σ et δQ est la quantité de chaleur reçue par le système Σ à travers la surface $\mathcal{S}$ entre les instants t et $t + dt$.
L'énergie interne $U(t)$ contenue dans le volume $\mathcal{V}$ à l'instant t est :

$$U(t) = \iiint_{\mathcal{V}} u(M,t)dm = \iiint_{\mathcal{V}} u(M,t)\rho d\tau$$

L'énergie interne $U(t + dt)$ contenue dans le volume $\mathcal{V}$ à l'instant $t + dt$ est :

$$U(t+dt) = \iiint_{\mathcal{V}} u(M,t+dt)dm = \iiint_{\mathcal{V}} u(M,t+dt)\rho d\tau$$

On peut calculer la variation de l'énergie interne $dU = U(t + dt) - U(t)$:

$$dU \quad = \quad \iiint_{\mathcal{V}} \left(u(M,t+dt) - u(M,t)\right)\rho d\tau = \iiint_{\mathcal{V}} \frac{\partial u}{\partial t}(M,t)\rho d\tau dt \tag{16}$$

En utilisant l'Équation (5) et le théorème de Green–Ostrogradski, on exprime la quantité de chaleur reçue par le système Σ entre les instants t et $t + dt$. :

$$\delta Q = -\oiint_{\mathcal{S}} \overrightarrow{j_{\mathsf{th}}} \cdot d\vec{S}\,dt = -\iiint_{\mathcal{V}} \vec{\nabla} \cdot \overrightarrow{j_{\mathsf{th}}}\,dtd\tau \tag{17}$$

En utilisant les Équations (16) et (17) on obtient :

$$\iiint_{\mathcal{V}} \left(\rho\frac{\partial u}{\partial t}(M,t) + \vec{\nabla} \cdot \overrightarrow{j_{\mathsf{th}}}(M,t)\right) d\tau = 0$$

On retrouve l'Équation (12).

On peut exprimer la Loi de conservation en utilisant la notion de capacité thermique. La différentielle de la fonction d'état énergie interne est $dU = C_V dT$, ou alors $du = c_m dT$, avec c_m la capacité thermique massique (ou chaleur spécifique). L'Équation (16) devient :

$$dU = \iiint_{\mathcal{V}} \rho c_m \frac{\partial T}{\partial t}(M,t)dtd\tau \tag{18}$$

En utilisant les Équations (18) et (17) on obtient la Loi de conservation :

$$\iiint_{\mathcal{V}} \left(\rho c_V \frac{\partial T}{\partial t}(M,t) + \vec{\nabla} \cdot \overrightarrow{j_{\mathsf{th}}}(M,t)\right) d\tau = 0$$

□

Équation de la diffusion thermique –
9. La Loi de Fourier est
$$\overrightarrow{j_{\mathsf{th}}} = -\lambda \overrightarrow{\nabla} T \tag{19}$$
La dimension du coefficient de conductivité thermique λ. est $[\lambda] = J \cdot s^{-1} \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$ ou $[\lambda] = W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$. En effet, comme $[\overrightarrow{\nabla} T] = K \cdot m^{-1}$
$$[\lambda] = \frac{[\overrightarrow{j_{\mathsf{th}}}]}{[\overrightarrow{\nabla} T]} = \frac{J \cdot s^{-1} \cdot m^{-2}}{K \cdot m^{-1}} = W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1} \tag{20}$$
10. À partir des Questions **7.** et **9.**, démontrer l'Équation de Diffusion en utilisant λ, ρ et c_V
$$\rho c_V \frac{\partial T}{\partial t}(M,t) = -\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{j_{\mathsf{th}}}(M,t) = -\overrightarrow{\nabla} \cdot \left(-\lambda \overrightarrow{\nabla} T(M,t)\right) = \lambda \Delta T(M,t).$$
Finalement,
$$\frac{\partial T}{\partial t}(M,t) = \frac{\lambda}{\rho c_V} \Delta T(M,t) \tag{21}$$
11. On introduit le coefficient de diffusion, ou diffusivité, $D_{\mathsf{th}} = \lambda / \rho c_V$. Ainsi, l'équation de diffusion s'écrit
$$\frac{\partial T}{\partial t}(M,t) = D_{\mathsf{th}} \Delta T(M,t) \tag{22}$$
Le coefficient de diffusion a pour unité $[D_{\mathsf{th}}] = m^2 \cdot s^{-1}$. En effet,
$$[D_{\mathsf{th}}] = \frac{[\lambda]}{[\rho][c_V]} = m^2 \cdot s^{-1} \tag{23}$$
avec $[\lambda] = J \cdot s^{-1} \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$, $[\rho] = kg \cdot m^{-3}$ et $[c_V] = J \cdot K^{-1} \cdot kg^{-1}$.

Seconde Partie : Résistances thermiques, Symétrie Cynlindrique et Sphérique

Géométrie cylindrique en régime stationnaire –
1. On considère l'Équation de diffusion thermique. On a :
$$\frac{\partial T}{\partial t}(M,t) = D_{\mathsf{th}} \Delta T(M,t) \tag{24}$$
avec $D_{\mathsf{th}} = \lambda / (\rho c_V)$. Dans le cadre d'une symétrie cylindrique, la température dépend seulement des coordonnées r et t. On a $T = T(r,t)$.
$$\frac{\partial T}{\partial t}(r,t) = D_{\mathsf{th}} \Delta T(r,t) \tag{25}$$
De plus, en régime stationnaire, la température est indépendante du temps, i.e. $T = T(r)$. L'équation de diffusion s'écrit $\Delta T(r) = 0$. Pour une symétire cylindrique, le

Laplacien scalaire en coordonnées cylindriques $\Delta T = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$.
se réduit à

$$\Delta T(r) = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dT}{dr}(r)\right)$$

Ainsi, l'équation de diffusion $\Delta T(r) = 0$ s'écrit

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dT}{dr}(r)\right) = 0$$

Après intégration, on obtient

$$T(r) = A\ln(r) + B \tag{26}$$

avec A, B deux constantes. De plus, on sait que pour $i = 1, 2$ à $r = r_i$ on a la température $T = T_i$. Ainsi $T_i = A\ln r_i + B$. Donc $T_1 - A\ln(r_1) = T_2 - A\ln(r_2)$, soit

$$A = \frac{T_2 - T_1}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)} \tag{27}$$

Pour $i = 1, 2$ on a $B = T_i - A\ln(r_i)$. En utilisant l'Équation (27), on obtient

$$B = T_i - \left(\frac{T_2 - T_1}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}\right)\ln(r_i) \tag{28}$$

Finalement, en utilisant (27) et (28), on trouve la solution de l'équation de diffusion (26) sous la forme :

$$T(r) = T_i + \left(\frac{T_2 - T_1}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}\right)\ln\left(\frac{r}{r_i}\right) \tag{29}$$

2. On calcul le flux thermique $\phi_{\mathsf{th}} = \iint_{\mathcal{S}} \overrightarrow{j_{\mathsf{th}}} \cdot d\overrightarrow{S}$. La Loi de Fourier $\overrightarrow{j_{\mathsf{th}}} = -\lambda\overrightarrow{\nabla}T$ permet d'exprimer le vecteur densité de flux thermique en fontion du gradient de température. L'opérateur gradient en coordonnées cylindriques est donné par :

$$\overrightarrow{\nabla} = \overrightarrow{e_r}\frac{\partial}{\partial r} + \overrightarrow{e_\theta}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + \overrightarrow{e_z}\frac{\partial}{\partial z}$$

donc

$$\overrightarrow{\nabla}T = \overrightarrow{e_r}\frac{\partial T}{\partial r} + \overrightarrow{e_\theta}\frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial \theta} + \overrightarrow{e_z}\frac{\partial T}{\partial z} \tag{30}$$

Lorsque la température ne dépend que de r, i.e. $T = T(r)$, l'expression du gradient se réduit à :

$$\overrightarrow{\nabla}T(r) = \frac{dT}{dr}(r)\overrightarrow{e_r} \tag{31}$$

La Loi de Fourier s'écrit $\overrightarrow{j_{\mathsf{th}}}(r) = -\lambda\frac{dT}{dr}(r)\overrightarrow{e_r}$, avec $\overline{j_{\mathsf{th}}}(r) = -\lambda dT/dr(r)$. On obtient :

$$\phi_{\mathsf{th}} = \iint_{\mathcal{S}} \left(-\lambda\frac{dT}{dr}(r)\overrightarrow{e_r}\right) \cdot d\overrightarrow{S} \tag{32}$$

On note $\overrightarrow{j_{\mathsf{th}}}(r) = \overline{j_{\mathsf{th}}}(r)\overrightarrow{e_r}$. Si on découpe la surface du cylindre $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2 \cup \mathcal{S}_{\mathsf{lat}}$ où $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$ sont les sections terminales du cylindre et $\mathcal{S}_{\mathsf{lat}}$ est la surface latérale.

$$\phi_{\mathsf{th}} = \iint_{\mathcal{S}_1} \overrightarrow{j_{\mathsf{th}}}(r) \cdot d\vec{S}_1 + \iint_{\mathcal{S}_2} \overrightarrow{j_{\mathsf{th}}}(r) \cdot d\vec{S}_2 + \iint_{\mathcal{S}_{\mathsf{lat}}} \overrightarrow{j_{\mathsf{th}}}(r) \cdot d\vec{S}_{\mathsf{lat}}$$

On obtient :

$$\begin{aligned}\phi_{\mathsf{th}} \quad = \quad & -\lambda \iint_{\mathcal{S}_1} \left(\frac{dT}{dr}(r)\right) \overrightarrow{e_r} \cdot d\vec{S}_1 - \lambda \iint_{\mathcal{S}_2} \left(\frac{dT}{dr}(r)\right) \overrightarrow{e_r} \cdot d\vec{S}_2 \\ & -\lambda \iint_{\mathcal{S}_{\mathsf{lat}}} \left(\frac{dT}{dr}(r)\right) \overrightarrow{e_r} \cdot d\vec{S}_{\mathsf{lat}}\end{aligned}$$

On a les surfaces élémentaires $d\vec{S}_1 = rdrd\theta\overrightarrow{e_z}$, $d\vec{S}_2 = -rdrd\theta\overrightarrow{e_z}$ et $d\vec{S}_{\mathsf{lat}} = rd\theta dz\overrightarrow{e_r}$. Les deux premières intégrales sont identiquement nulles. Il reste l'intégrale sur la surface latérale

$$\phi_{\mathsf{th}} = -\lambda \iint_{\mathcal{S}_{\mathsf{lat}}} \left(\frac{dT}{dr}(r)\right) rd\theta dz$$

soit :

$$\phi_{\mathsf{th}} = -\lambda r \left(\frac{dT}{dr}(r)\right) \int_{-h/2}^{h/2} dz \int_0^{2\pi} d\theta = -\lambda r \left(\frac{dT}{dr}(r)\right) [z]_{-h/2}^{h/2} [\theta]_0^{2\pi}$$

Finalement, on obtient :

$$\phi_{\mathsf{th}} = -\lambda 2\pi r h \frac{dT}{dr}(r)$$

On dérive l'Équation (29) $\displaystyle\frac{dT}{dr}(r) = \frac{d}{dr}\left(T_i + \left(\frac{T_2 - T_1}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}\right)\ln\left(\frac{r}{r_i}\right)\right) = \frac{1}{r}\left(\frac{T_2 - T_1}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}\right)$

Ainsi

$$\phi_{\mathsf{th}} = -\frac{\lambda 2\pi h (T_2 - T_1)}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)} \tag{33}$$

3. La résistance thermique de conduction est :

$$R_{\mathsf{th}}^{\mathsf{cond}} = \frac{T_1 - T_2}{\phi_{\mathsf{th}}} = \frac{1}{\lambda 2\pi h} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) \tag{34}$$

Troisième Partie : Résistances thermiques, flux conducto-convectif

Résistance et Conductance – En régime permanent on introduit la résistance thermique R_{th} entre deux surfaces isothermes T_1 et T_2.

1. $R_{\mathsf{th}}^{\mathsf{conv}} = \dfrac{T_2 - T_1}{\phi_{\mathsf{th}}}$ et $G_{\mathsf{th}}^{\mathsf{conv}} = \dfrac{\phi_{\mathsf{th}}}{T_2 - T_1}$

2. $[R_{\mathsf{th}}^{\mathsf{conv}}] = K \cdot W^{-1}$ et $[G_{\mathsf{th}}^{\mathsf{conv}}] = W \cdot K^{-1}$

Loi de Newton –
3. La Loi de Newton s'écrit :

$$\phi_{\mathsf{conv}} = h_{\mathsf{c}}\mathcal{S}(T_\circ - T_\infty) \tag{35}$$

où ϕ_{conv} est le flux thermique par convection, $\mathcal{S}$ est la surface de l'interface et h_c est le coefficient de convection $[h_{\mathsf{c}}] = W \cdot m^{-2} \cdot K^{-1}$
4. On a $\phi_{\mathsf{conv}} = j_{\mathsf{conv}}\mathcal{S}$. La densité de flux de chaleur par convection est :

$$j_{\mathsf{conv}} = h_{\mathsf{c}}(T_\circ - T_\infty) \tag{36}$$

5. La résistance thermique de convection $R_{\mathsf{th}}^{\mathsf{conv}}$ est donnée par :

$$R_{\mathsf{th}}^{\mathsf{conv}} = \frac{1}{h_c\mathcal{S}} \tag{37}$$

La conductance thermique de convection $G_{\mathsf{th}}^{\mathsf{conv}}$ est donnée par :

$$G_{\mathsf{th}}^{\mathsf{conv}} = h_c\mathcal{S} \tag{38}$$

On a $[R_{\mathsf{th}}^{\mathsf{conv}}] = K \cdot W^{-1}$ et $[G_{\mathsf{th}}^{\mathsf{conv}}] = W \cdot K^{-1}$. En effet $[R_{\mathsf{th}}^{\mathsf{conv}}] = \frac{1}{[h_c][\mathcal{S}]}$ et $[G_{\mathsf{th}}^{\mathsf{conv}}] = [R_{\mathsf{th}}^{\mathsf{conv}}]^{-1} = [h_c][\mathcal{S}]$, avec $[h_c] = W \cdot m^{-2} \cdot K^{-1}$ et $[\mathcal{S}] = m^2$.

Mur composite et flux conducto-convectif –
6. On exprime les résistances thermiques $R^{(\mathbf{I})}$, $R^{(\mathbf{II})}$ et $R^{(\mathbf{III})}$ pour chacune des zones $\mathbf{I}, \mathbf{II}$ et **III**, respectivement. On a deux résistances thermiques de convection :

$$R^{(\mathbf{I})} = \frac{1}{h_e\mathcal{S}}, \qquad R^{(\mathbf{III})} = \frac{1}{h_i\mathcal{S}}$$

et une résistance thermique de diffusion :

$$R^{(\mathbf{II})} = \sum_{k=1}^{n} R_k^{(\mathbf{II})} = \sum_{k=1}^{n} \frac{e_k}{\lambda_k\mathcal{S}}$$

où pour chaque couche $R_k^{(\mathbf{II})} = e_k/\lambda_k\mathcal{S}$.
7. La résistance thermique totale R_{th} de l'ensemble constitué par les zones **I–III** est :

$$R^{(\mathbf{II})} = \sum_{k=1}^{n} R^{(\mathbf{II}_k)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{e_k}{\lambda_k\mathcal{S}} \tag{39}$$

Et donc, $R_{\mathsf{th}} = R^{(\mathbf{I})} + R^{(\mathbf{II})} + R^{(\mathbf{III})}$ nous donne

$$R_{\mathsf{th}} = \frac{1}{h_e\mathcal{S}} + \frac{1}{h_i\mathcal{S}} + \sum_{k=1}^{n} \frac{e_k}{\lambda_k\mathcal{S}} = \frac{1}{\mathcal{S}}\left(\frac{1}{h_e} + \frac{1}{h_i} + \sum_{k=1}^{n} \frac{e_k}{\lambda_k}\right) \tag{40}$$

On en déduit la conductance thermique $G_{\mathsf{th}} = 1/R_{\mathsf{th}}$ pour l'ensemble constitué par les zones **I–III** :

$$G_{\mathsf{th}} = \mathcal{S}\left(\frac{1}{h_e} + \frac{1}{h_i} + \sum_{k=1}^{n} \frac{e_k}{\lambda_k}\right)^{-1} \tag{41}$$

8. En régime permanent, le flux thermique se conserve $\phi_{\mathsf{th}} = \phi^{(\mathbf{I})} = \phi_1^{(\mathbf{II})} = \cdots = \phi_k^{(\mathbf{II})} = \cdots = \phi_n^{(\mathbf{II})} = \phi^{(\mathbf{III})}$. Pour la zone **I**, on a un flux de convection donné par :

$$\phi^{(\mathbf{I})} = h_e \mathcal{S} \left(T_e - T_1 \right) \tag{42}$$

Pour la zone **III**, on a un flux de convection donné par

$$\phi^{(\mathbf{III})} = h_i \mathcal{S} \left(T_{n+1} - T_i \right) \tag{43}$$

Dans la zone $\mathbf{II} = \bigcup_{k=1}^{n} \mathbf{II}_k$, pour chaque couche $\{\mathcal{C}_k\}_{1 \leq k \leq n}$ on a la relation $\phi_k^{(\mathbf{II})} = (T_k - T_{k+1})/R_k^{(\mathbf{II})}$ où $R_k^{(\mathbf{II})} = e_k/\lambda_k \mathcal{S}$ est la résistance thermique de conduction de la couche k. On obtient :

$$\phi_k^{(\mathbf{II})} = \left(T_k - T_{k+1} \right) \left(\frac{e_k}{\lambda_k \mathcal{S}} \right)^{-1} \tag{44}$$

On a $T_1 - T_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left(T_k - T_{k+1} \right)$. Ainsi,

$$T_1 - T_{n+1} = \sum_{k=1}^{n} \phi_k^{(\mathbf{II})} \frac{e_k}{\lambda_k \mathcal{S}} = \phi_{\mathsf{th}} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{e_k}{\lambda_k \mathcal{S}} \right) \tag{45}$$

où $\phi_{\mathsf{th}} = \phi_1^{(\mathbf{II})} = \cdots = \phi_k^{(\mathbf{II})} = \cdots = \phi_n^{(\mathbf{II})}$. On exprime le flux thermique ϕ_{th} en fonction des données du mur composite

$$\phi_{\mathsf{th}} = \left(T_1 - T_{n+1} \right) \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{e_k}{\lambda_k \mathcal{S}} \right)^{-1} \tag{46}$$

On observe que $T_e - T_i = (T_e - T_1) + (T_1 - T_{n+1}) + (T_{n+1} - T_i)$

$$T_e - T_i \quad = \quad \phi^{(\mathbf{I})} \frac{1}{h_e \mathcal{S}} + \phi^{(\mathbf{III})} \frac{1}{h_i \mathcal{S}} + \sum_{k=1}^{n} \phi_k^{(\mathbf{II})} \frac{e_k}{\lambda_k \mathcal{S}} = \phi_{\mathsf{th}} \left(\frac{1}{h_e \mathcal{S}} + \frac{1}{h_i \mathcal{S}} + \sum_{k=1}^{n} \frac{e_k}{\lambda_k \mathcal{S}} \right)$$

Finalement,

$$\phi_{\mathsf{th}} = \left(T_e - T_i \right) \left(\frac{1}{h_e \mathcal{S}} + \frac{1}{h_i \mathcal{S}} + \sum_{k=1}^{n} \frac{e_k}{\lambda_k \mathcal{S}} \right)^{-1} \tag{47}$$

9. La densité de flux $\overrightarrow{j_{\mathsf{th}}} = j_{\mathsf{th}} \vec{n}$ où $\vec{n}$ est un vecteur unitaire normal à la surface $\mathcal{S}$. On a $\phi_{\mathsf{th}} = j_{\mathsf{th}} \mathcal{S}$, donc

$$j_{\mathsf{th}} = \left(T_e - T_i \right) \left(\frac{1}{h_e} + \frac{1}{h_i} + \sum_{k=1}^{n} \frac{e_k}{\lambda_k} \right)^{-1} \tag{48}$$